

# Dynamisk bevegelse av stigerør induisert av isbelastning på en bøye

av

Rolf Espen Trøen Hansen

**MASTEROPPGAVE**

*for graden*

***Master i Anvendt matematikk og mekanikk***

*(Master of Science)*



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet  
Universitetet i Oslo*

*Mai 2008*

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
University of Oslo*



## Forord

Det å skrive masteroppgave har vært en både hektisk og stressende men fremfor alt lærerik opplevelse. Først og fremst vil jeg takke mine to veiledere Harald Osnes og Marc Lefranc for god hjelp og gode råd gjennom hele semesteret. Videre vil jeg takke alle kjente hos FORCE Technology som alle har bidratt på sin måte. Takk til Sissel som har vært oppmuntrende og holdt ut med meg. Jeg vet hvor oppslukt jeg kan bli iblant. En stor takk går også til Hannibal som tok seg tid til å lese igjennom hele oppgaven på jakt etter skrivefeil og grammatiske blemmer. Sist, men ikke minst, vil jeg også takke Eirik, Katinka og Synnøve. Masterstudiet hadde ikke vært det samme uten dere.

Rolf Espen Trøen Hansen  
Blindern, mai 2008



## Sammendrag

Offshore-installasjoner i arktiske strøk er gjerne avhengig av å plassere sensitivt utstyr på havbunnen slik at det er beskyttet mot det ugjestmilde arktiske miljøet. Overflateanlegget vil utsettes for miljølaster fra blant annet drivis, og et bestemt design av konstruksjonen på overflaten kan dermed være fordelaktig med tanke på å minimere islastene. En konisk formet kontrollbøye er et eksempel på en slik konstruksjon. Den skrå sideflaten til bøyen vil få isen til å bøye av på en fordelaktig måte.

Is er et svært komplekst materiale hvis oppførsel styres av mange faktorer. I kontakt med en konstruksjon kan den svikte på flere måter, og god kjennskap til mekanismene som styrer dette er svært viktig for beregningen av islaster. En gjennomgang av de ulike feilmekanismene blir gitt i denne masteroppgaven. Feilmekanismen i det tilfellet et isflak treffer en skrå flate studeres i detalj.

Islaster på en konisk formet kontrollbøye kan føre til en periodisk bevegelse av bøyen dersom den er forankret til havbunnen. Et stigerør som forbinder undervannsanlegget og kontrollbøyen vil påvirkes av denne bevegelsen. FORCE Technology ønsker å verifisere om “stigerør – kontrollbøye” konseptet er en egnet løsning for arktiske miljøer. I denne masteroppgaven studeres den periodiske bevegelsen til kontrollbøyen og den dynamiske responsen i stigerøret både ved hjelp av analytiske metoder, og den spesialtilpassede programpakken RIFLEX. Den dynamiske responsen i stigerøret vil føre til spenninger som varierer langs rørets lengde og i tiden. Det er de maksimale spenningene som i første omgang gir et bilde av om stigerøret tåler bevegelsen. Disse spenningene settes derfor opp mot en gitt toleransespenning som betegner den største tillatte spenningen i stigerøret.

I den analytiske modellen beskrives stigerøret som et kontinuerlig system, samtidig som det gjøres en del forenklinger i forhold til det virkelige stigerørsystemet. Spesielt med tanke på geometri. I denne modellen benyttes modal analyse til å beskrive den dynamiske bevegelsen. Det virkelige stigerørsystemet modelleres ved hjelp av RIFLEX. De to modellene gjør det nå mulig å undersøke i hvilken grad man kan tilnærme den dynamiske bevegelsen til et forholdsvis komplekst system med en relativt enkel modell.



# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>1</b>
1.1	Generell bakgrunn/problemstilling . . . . .	1
1.2	Spesifikasjon av oppgaven . . . . .	1
1.3	Organisering av oppgaven . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Teori</b>	<b>3</b>
2.1	Is . . . . .	3
2.1.1	Islaster og feilmekanismer . . . . .	3
2.1.2	Beregning av islaster . . . . .	7
2.1.3	Isstyrke . . . . .	10
2.2	Dynamisk analyse . . . . .	12
2.2.1	Enkle systemer . . . . .	12
2.2.2	Dynamisk analyse av slanke konstruksjoner . . . . .	13
2.2.3	Løsning av dynamisk likevektsligning . . . . .	17
2.3	RIFLEX . . . . .	21
2.3.1	Kontinuumsmekanikk . . . . .	21
2.3.2	Elementformulering . . . . .	21
2.3.3	Statisk elementanalyse . . . . .	22
2.3.4	Dynamisk analyse . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Løsning av problem</b>	<b>29</b>
3.1	Dynamisk bevegelse av kontrollbøyen basert på tester . . . . .	29
3.2	Dynamisk respons av stigerør – analytisk løsning . . . . .	35
3.2.1	Dynamisk likevektsligning . . . . .	36
3.2.2	Løsning av dynamisk likevektsligning . . . . .	38
3.2.3	Fri svingning . . . . .	40
3.2.4	Ortogonalitetsegenskaper . . . . .	42
3.2.5	Dynamisk respons som følge av kontrollbøyens bevegelse . . . . .	43
3.2.6	Normalisering av svingemoder . . . . .	44
3.3	Dynamisk respons av stigerør – løsning ved hjelp av RIFLEX . . .	45
3.3.1	Modellering av stigerørsystemene . . . . .	45
3.3.2	Dynamisk analyse i RIFLEX . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Resultater</b>	<b>47</b>
4.1	Sammenligning av forenklede modeller . . . . .	48
4.1.1	Svingemoder og egenfrekvenser . . . . .	48
4.1.2	Forskyvning . . . . .	48
4.2	Modifisering av analytisk modell . . . . .	51
4.3	Sammenligning av analytisk og virkelig modell . . . . .	52
4.3.1	Forskyvninger . . . . .	52
4.3.2	Krefter og spenninger . . . . .	55
4.4	Statistiske krefter og spenninger . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Diskusjon av resultater og konklusjon</b>	<b>65</b>
5.1	Dynamiske spenninger . . . . .	65
5.2	Statistiske spenninger . . . . .	66
5.3	Forslag til videre arbeid . . . . .	67
	<b>Vedlegg</b>	<b>69</b>
A	Kontrollbøyen . . . . .	69
A.1	Masse av vann under kontrollbøyens skjørtekant . . . . .	69
B	Definisjoner . . . . .	71
B.1	Addert masse . . . . .	71
B.2	Viskøst drag . . . . .	72
C	MATLAB-kode . . . . .	74
C.1	Bevegelse av kontrollbøyen . . . . .	74
C.2	Eigenverdiproblem . . . . .	77
C.3	Bevegelse av stigerør . . . . .	79



# Kapittel 1

## Innledning

### 1.1 Generell bakgrunn/problemstilling

I de senere årene har offshorevirksomheten fått en økende interesse for arktiske miljøer. I disse miljøene venter nye utfordringer i form av både meteorologiske og geografiske forhold. En typisk utfordring ved utbygging av oljefelter i arktiske strøk vil være drivis, og det er derfor rimelig å anta at sensitivt utstyr som for eksempel brønnhoder vil bli installert på havbunnen. Dette vil medføre behov for en kontrollbøye på overflaten. Denne bøyen vil typisk inneholde nødvendige styringssystemer og kjemikaler for å kunne styre produksjonen. Bøyen vil bli forbundet med undervannsanlegget ved hjelp av et stigerør. Når bøyen utsettes for drivis, vil den oppleve en dynamisk bevegelse som et resultat av blant annet isbrytningsprosessen. Denne bevegelsen vil indusere dynamisk eksitasjon av stigerøret. For å kvalifisere konseptet er det derfor viktig å verifisere at disse eksitasjonene ikke gir opphav til krefter i stigerøret eller dets innfestning som overskrider styrken/gitte maksimalverdier.

Force Technology har gjennomført tester for en slik bøye i drivis. Disse testene har resultert i tidsserier av både forskyvninger og krefter. Basert på disse er formålet med oppgaven å beregne krefter/moment/spenninger på forskjellige seksjoner av stigerøret.

### 1.2 Spesifikasjon av oppgaven

Oppgaven vil inneholde følgende:

- Generell innføring i is som materiale.
- Bruddmekanismer for is.
- Dynamiske ligninger for slanke konstruksjoner/stigerør – utledning av ligninger og analytiske løsninger.

- Dynamisk bevegelse av bøyen basert på tidsserier fra testene – forstå sammenhenger.
- Kjennskap til programvaren RIFLEX: Teori, ligningslødere, osv.
- Anvende RIFLEX til å løse/belyse oppgavens spesifikke problem (inkludert sammenligning med analytiske løsninger).
- Konklusjon.

### 1.3 Organisering av oppgaven

Selve oppgaven er i hovedsak delt i fire deler:

**En teoridel** som tar for seg relevant teori i forhold til forståelse og løsning av selve problemstillingen. Teriodelen dekkes i kapittel 2.

**En løsningsdel** som tar for seg analytisk og numerisk løsning av selve problemstillingen. Formålet med den analytiske løsningen er å skape en dypere forståelse for selve problemstillingen og belyse de viktigste aspektene og styrende faktorene rundt kontrollbøyens og stigerørets bevegelse. I løsningen av enkelte ligninger er programvarene MATLAB og Maple benyttet som “håndregningsverktøy”. Løsningsmetodene presenteres i kapittel 3.

**En resultatdel** hvor resultatene fra den analytiske og numeriske delen presenteres og sammenlignes. Denne delen finner vi i kapittel 4.

**En konklusjon** hvor resultatene settes opp i mot gitte maksimalverdier. Kapittel 5 tar for seg konklusjonen.

I tillegg finnes det et vedlegg hvor enkelte utregninger presiseres, begreper defineres, og relevant MATLAB-kode presenteres.

# Kapittel 2

## Teori

### 2.1 Is

Is er hverken et rent elastisk, viskøst eller plastisk materiale, og det kan derfor være vanskelig å analysere dette materialet. De mekaniske egenskapene til ren ferskvannsis er imidlertid godt kjent fra laboratorieforsøk, men det har vist seg vanskelig å bruke denne kunnskapen til å forutsi oppførselen til is i virkelig skala. Naturlig is og laboratorieis har forholdsvis ulike fysiske egenskaper, og formlene man har oppnådd gjennom laboratorieforsøk er ofte veldig avhengig av omgivelsene de er utført i [1].

Beregning av iskrefter dreier seg i hovedsak om å forstå hvordan is deformeres og svikter når den er utsatt for spenninger. Dette er imidlertid ingen enkel oppgave tatt i betraktning isens komplekse natur, og vi skal se at is kan svikte på mange måter avhengig av ulike faktorerers innvirkning.

#### 2.1.1 Islaster og feilmekanismer

Islaster er et resultat av interaksjonen mellom is og en eller flere konstruksjoner. Dette kalles gjerne iseffekter. Disse effektene er vanligvis knyttet til en tilstand hvor isen svikter/feiler i sammenstøt med konstruksjonen, og lastene vil i stor grad variere avhengig av hvilken feilmekanisme som er dominerende. Den største lasten is kan påføre en konstruksjon, oppnås når isen er intakt. Isen kan aldri påføre konstruksjonen en last som overgår dens egen styrke. Da vil den svikte i kontakt med konstruksjonen. Den vanligste metoden for beregning av islaster er derfor beregning av isstyrken.

Avhengig av egenskapene til isen, egenskapene til konstruksjonen og drivhastigheten til isen, kan isen svikte på ulike måter. Vi kaller dette feilmekanismer [2, 3]:

**Kryp** (figur 2.1a) forekommer ved svært lave drivhastigheter, under 1 – 3 mm/s. Isen kan gi etter/svikte ved at den “kryper” rundt konstruksjonen uten å

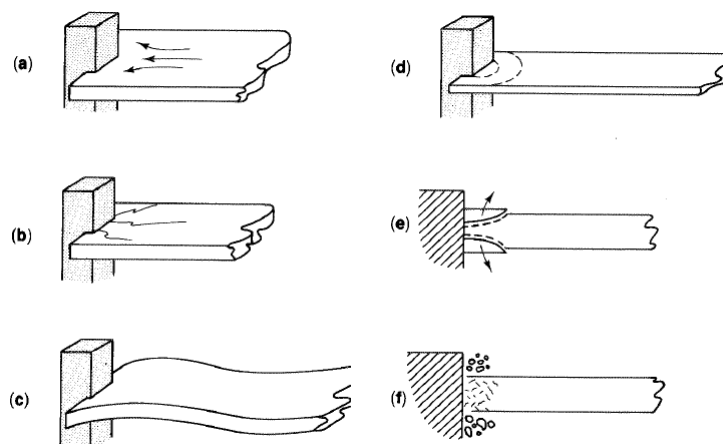
sprekke. Hele konstruksjonsflaten som vender mot isen vil være i kontakt med isen .

**Knekning** (figur 2.1c) forekommer ved høyere hastigheter, og krever at den delen av isen som er i kontakt med konstruksjonen er statisk. Dette er kun tilfelle hvis isen virker på en vertikal flate, og er typisk for tynn is mot en bred flate.

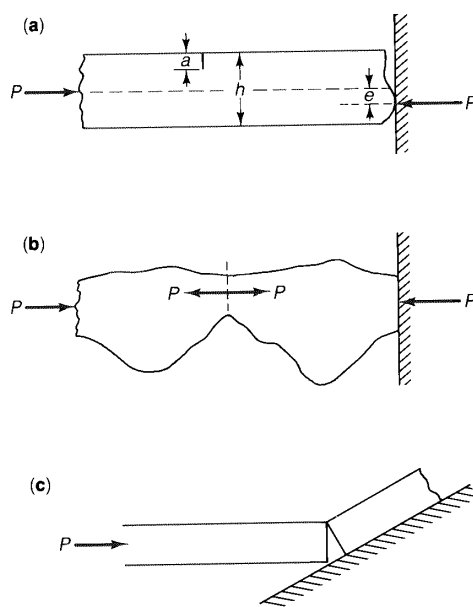
**Knusing** (figur 2.1f) forekommer gjerne når isen treffer en vertikal flate ved enda høyere hastigheter, og når spenningene i isen når trykkfastheten (trykkstivheten) til isen. Isen pulveriseres og sprøytes oppover og nedover

**Sprekking** (figur 2.1 b og d) forekommer sammen med alle feilmekanismene untatt kryp. Radiell sprekking opptrer gjerne i kantene på vertikale konstruksjoner, mens periferisk sprekking er knyttet til knekning og bøyning.

**Bøyning** (figur 2.2) er den dominerende feilmekanismen når isen treffer en skrå flate. Isen vil bøyes ut av planet en viss avstand fra konstruksjonen, og utsettes for strekk. Strekkstyrken/bruddstyrken til is er lavere enn styrken ved trykkbelastning, og islastene på en skrå flate er følgelig mindre enn på en vertikal flate. Andre faktorer som fører til at is kan svikte i form av bøyning kan være eksentrisk last eller irregulær tykkelsesprofil (figur 2.2 a) og b) ).



Figur 2.1: Ulike feilmekanismer knyttet til kontakten mellom drivis og en konstruksjon [3].

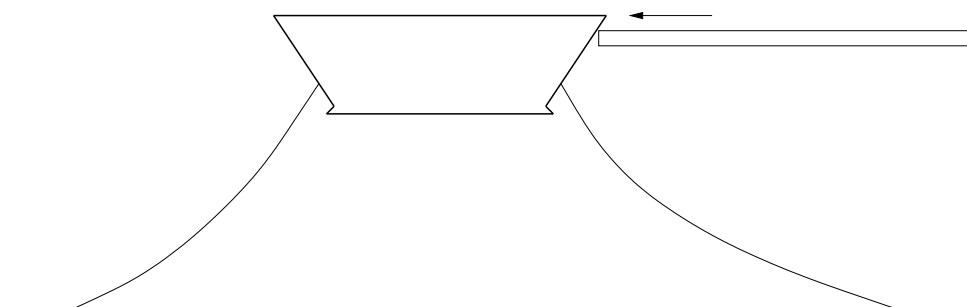


Figur 2.2: Is som feiler i form av bøyning: a) Eksentrisk last, b) Irregulær tykkelsesprofil, c) Kontakt med skrå flate [3].

### Bøyningsforløpet

Det vil alltid være en fordel å minimere lastene som virker på en konstruksjon. Vi har sett at islaster knyttet til bøyning av is vil føre til lavere laster enn feilmekanismene forbundet med trykk. En konstruksjon som sikrer at isen svikter ved bøyning kan derfor være fordelaktig. Kontrollbøyen omtalt i problemstillingen er et eksempel på en slik konstruksjon (figur 2.3). Bøyens koniske form sørger for at isens dominerende feilmekanisme er bøyning, samtidig som isens drivretning blir ubetydelig.

Interaksjonsforløpet mellom isen og en skrå flate kan deles inn i flere steg:



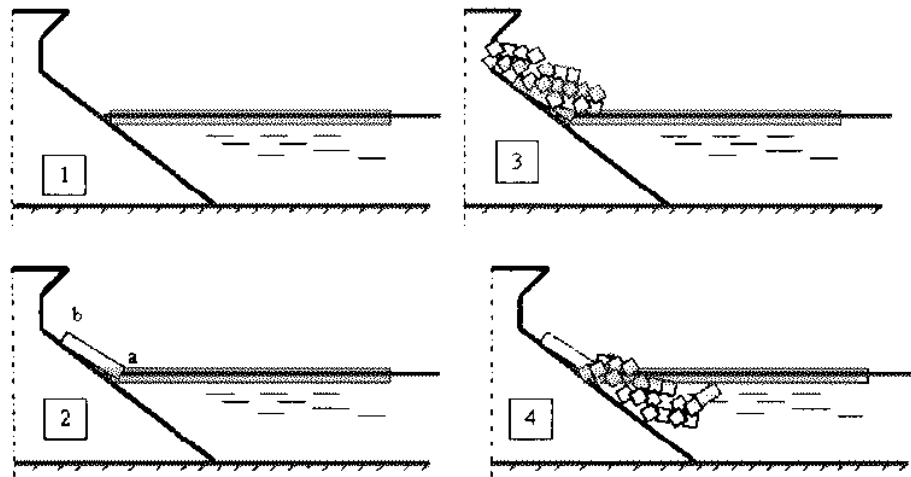
Figur 2.3: Konisk formet kontrollbøye i kontakt med drivis.

## 2. TEORI

---

- Isflaket vil i første omgang skyve bøyen bakover til forankringslinene er stramme. Flaket vil så bevege seg langs den skrå flaten helt til isens strekkstyrke nås. Flaket vil da deles i to; en isblokk og den resterende delen av isflaket (figur 2.4.1 og 2.4.2 ).
- Den resterende delen av isflaket fortsetter å bevege seg langs den skrå flaten samtidig som den skyver isblokken foran seg helt til isens strekkstyrke/bruddstyrke nås på ny, og isflaket igjen deler seg. Denne prosessen fortsetter slik at isflaket deles i mindre og mindre deler, og en ansamling av isblokker bygger seg opp (figur 2.4.2 og 2.4.3). Den minste lengden til disse blokkene vil ligge i området tre til fem ganger istykkelsen [2].
- En del av isblokkene vil etterhvert falle ned på isflaket. Når tyngden fra disse når en viss størrelse vil isflaket avskjæres en bestemt avstand fra konstruksjonen, og alle, eller deler av, isblokkene vil synke (figur 2.4.4).
- Bøyen vil nå bli trukket tilbake mot sin opprinnelige posisjon av forankringslinene, og prosessen gjentar seg.

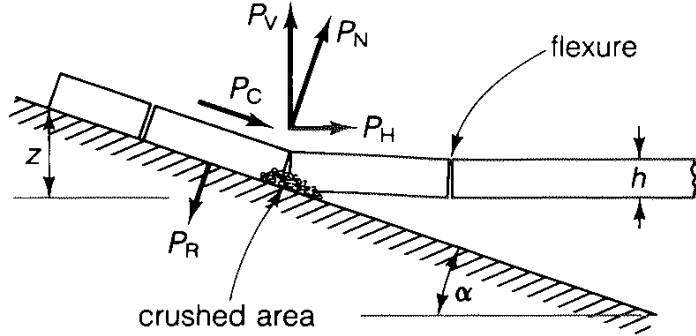
Denne prosessen vil gi opphav til en periodisk last, og dermed en periodisk bevegelse av bøyen.



Figur 2.4: Is som svikter i kontakt med en skrå flate [4].

### 2.1.2 Beregning av islaster

Alle typer islaster, statiske eller dynamiske, globale eller lokale, er i stor grad avhengig av formen til konstruksjonene den virker på [3]. I dette delkapittelet skal vi se på todimensjonale islaster på en skrå flate.



Figur 2.5: Isflak i kontakt med en skrå flate med helning  $\alpha$  [3].

Dersom vi ser på et tilfelle hvor et isflak med tykkelse  $h$  treffer en skrå flate med helning  $\alpha$ , figur 2.5, må vi i tråd med det vi har sett tidligere ta hensyn til to ting; at isen svikter ved bøyning og at den skyver isblokker oppover den skrå flaten. På kontaktflaten mellom isen og konstruksjonen kan vi dele kreftene som virker inn i en vertikal og en horisontal komponent,  $P_V$  og  $P_H$ . Hvis friksjonskoeffisienten  $\mu$  er kjent, kan disse kreftene nå uttrykkes med hensyn på normalkomponenten ved

$$\begin{aligned} P_H &= P_N \sin \alpha + \mu P_N \cos \alpha \\ P_V &= P_N \cos \alpha - \mu P_N \sin \alpha \\ \Rightarrow P_H &= \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} P_V. \end{aligned}$$

Croasdale la i 1980 frem en modell som beskriver den horisontale lasten per enhetsbredde [3]:

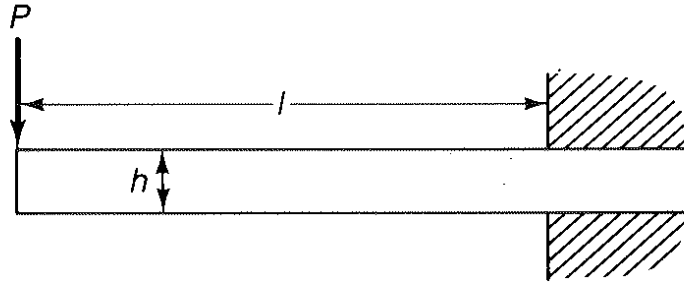
$$\frac{P_H}{W} = \sigma_f \left[ \frac{\rho_w g h^5}{E} \right]^{\frac{1}{4}} C_1 + z h \rho_i g C_2. \quad (2.1)$$

Det første leddet på høyre side beskriver kreftene som får isen til å svikte, mens det andre leddet representerer kreftene som skyver isblokkene oppover den skrå flaten.  $W$  er bredden til isflaket,  $E$  er Youngs modul,  $\rho_w$  og  $\rho_i$  er tettheten til henholdsvis vannet og isen,  $z$  er den vertikale avstanden isblokkene skyves oppover flaten. Koeffisientene  $C_1$  og  $C_2$  er funksjoner av helningen  $\alpha$  og

## 2. TEORI

---

friksjonskoeffisienten  $\mu$ . Bruddstyrken til isen,  $\sigma_f$ , har blitt bestemt fra forsøk, og er definert som  $\sigma_f = \frac{6Pl}{Wh^2}$ , der  $P$  er tverrlasten som skal til for å få en isbjelke med lengde  $l$ , tykkelse  $h$  og bredde  $W$  (figur 2.6) til å svikte. Fra forsøk har man at  $\sigma_f$  ligger i området  $[0.5, 1.0]$  MPa for ferskvannsis, og  $[0.1, 0.8]$  MPa for havis [3].



Figur 2.6: Bruddstyrken til is [3].

Koeffisientene  $C_1$  og  $C_2$  er gitt ved

$$C_1 = 0.68 \left[ \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \right]$$
$$C_2 = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \left[ \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right]$$

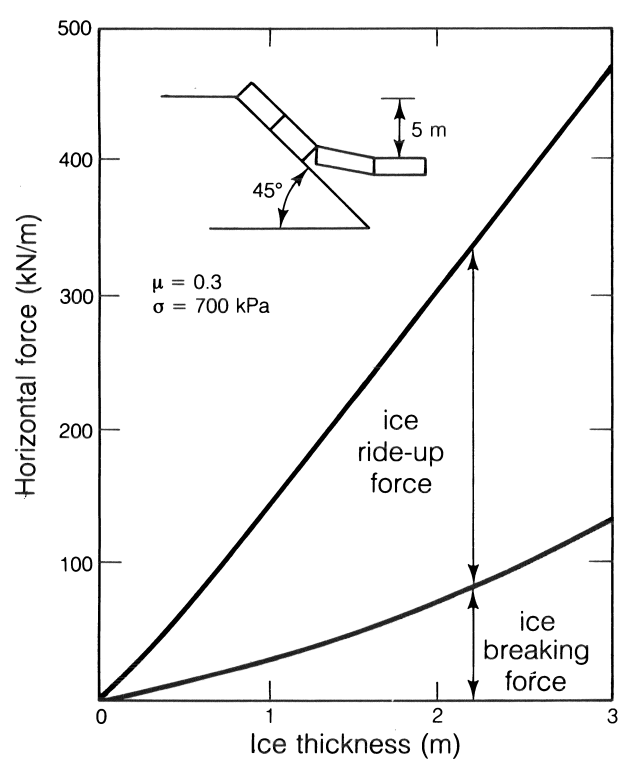
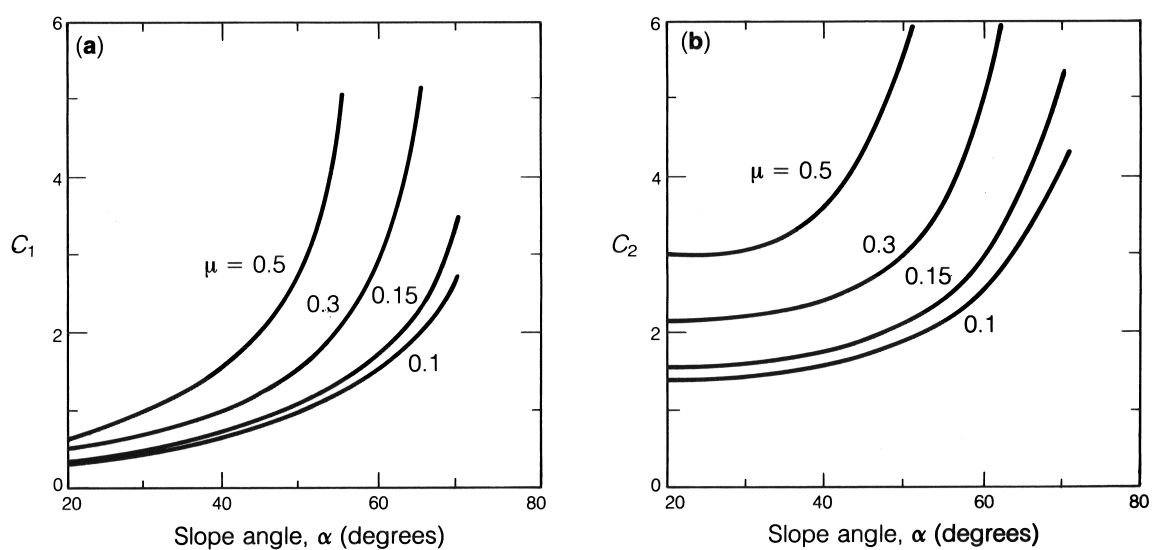
og er plottet i figur 2.7 for typiske verdier av  $\alpha$  og  $\mu$ .

Den horisontale kraften  $P_H$  er vist nederst i figur 2.7 som funksjon av istykkelsen  $h$ , som her varierer fra 0 – 3 meter. Helningen er satt til  $\alpha = 45^\circ$  og friksjonskoeffisienten til  $\mu = 0.3$ . Det er antatt at isen har en bruddstyrke på 0.7 MPa og at den kan gli en vertikal distanse  $z = 5$  meter. Det er tydelig at kraften som skyver isblokkene er dominerende, og fra Croasdales ligning, (2.1), ser vi at denne øker lineært med istykkelsen. Dette betyr at den gjennomsnittelige trykkraften mot en skrå flate er tilnærmet uavhengig av tykkelsen til isen. I 1997 la Timco & Cornett frem en ligning som beregner islastene på en flate med negativ helning. Denne er basert på Croasdales ligning, men helningen  $\alpha$  er byttet ut med den negative helningen, og tettheten til is er byttet ut med tetthetsforskjellen mellom vann og is [2]:

$$P_H = C_3 W \sigma_f \left[ \frac{\rho_w g h^5}{E} \right]^{\frac{1}{4}} \left[ 1 + \frac{\pi^2 l}{4W} \right] + C_4 d h (\rho_w - \rho_i) g,$$

der  $d$  er dypgangen til den skrå flaten og er en negativ størrelse, og de nye





Figur 2.7: Øverst:  $C_1$  og  $C_2$  som funksjoner av helningen  $\alpha$  og friksjonskoeffisienten  $\mu$  [3]. Nederst: Horisontal islast mot en skrå flate [3].

koeffisientene  $C_3$  og  $C_4$  er gitt ved:

$$C_3 = 0.68 \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha}$$

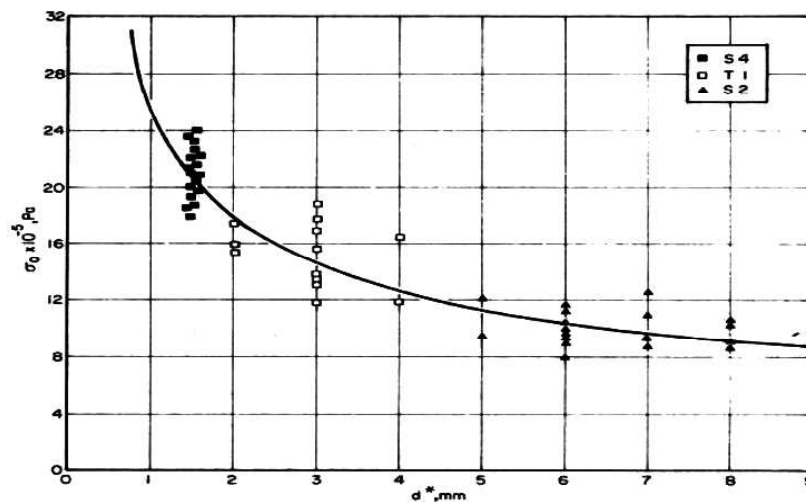
$$C_4 = (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \left[ \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} + \cot \alpha \right]$$

### 2.1.3 Isstyrke

Isstyrken styres av flere parametre. I det videre gis en kort oversikt over de viktigste; kornstørrelse, porøsitet, tøyingsrate, og temperatur.

#### Kornstørrelse

Kornstørrelse er en viktig parameter forbundet med isstyrken. Forsøk har vist at isens strekkstyrke (bruddstyrke) er større jo mindre iskornene er. Is klassifiseres gjerne etter størrelsen på kornene og orienteringen til iskrystallene [1].



Figur 2.8: Strekkstyrken til is som funksjon av kornstørrelsen [1].

#### Porøsitet

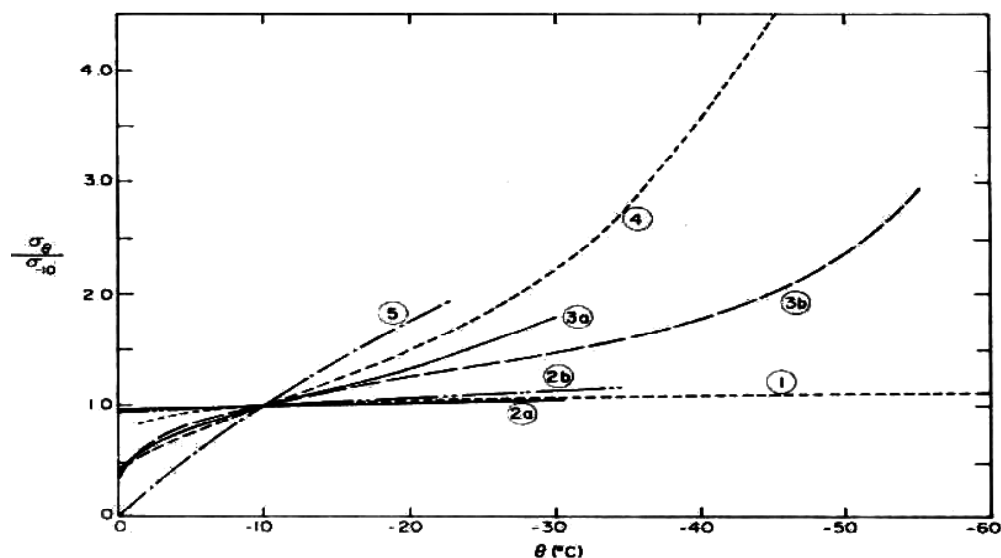
Saltholdigheten til is skyldes i hovedsak lommer med saltvann fanget i isen. Det er kun en neglisjerbar mengde av salt som inngår i den faste løsningen av iskrystaller [1]. Gasser, i hovedsak luft, vil også eksistere i form av bobler som er fanget i fryseprosessen [3]. Det er en direkte sammenheng mellom saltholdigheten til isen og saltholdigheten til vannet som isen dannes av. Lommene med saltvann og boblene med gass vil redusere isens tetthet og gjøre den mer porøs.

## Tøyningsrate

Is kan oppføre seg både som et duktilt og som et sprøtt materiale [3]. Denne oppførselen er avhengig av tøyningsraten som beskriver forholdet mellom den relative hastigheten mellom isen og konstruksjonen og bredden til kontaktflaten. Is vil oppføre seg som et duktilt materiale ved lave tøyningsrater ( $< 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ) og som et sprøtt materiale ved høye rater ( $> 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ). For tøyningsrater i området  $[10^{-3}, 10^{-2}] \text{ s}^{-1}$  vil isen være i en overgangsfase mellom duktil og sprø oppførsel. Det er i denne overgangen isstyrken er størst [1, 5].

## Temperatur

Isstyrkens følsomhet mot temperaturforandringer er avhengig av tøyningsraten. Ved høye tøyningsrater, og spesielt hvis isen er i strekk, varierer isstyrken lite med temperaturen. Ved lave tøyningsrater, hvor isen oppfører seg duktilt, vil temperaturen påvirke både strekk- og trykkstyrken til isen. Figur 2.9 viser hvordan isstyrken varierer med temperaturen. Alle spenningsverdiene er normalisert med hensyn på en temperatur på  $10^\circ \text{C}$  [1].



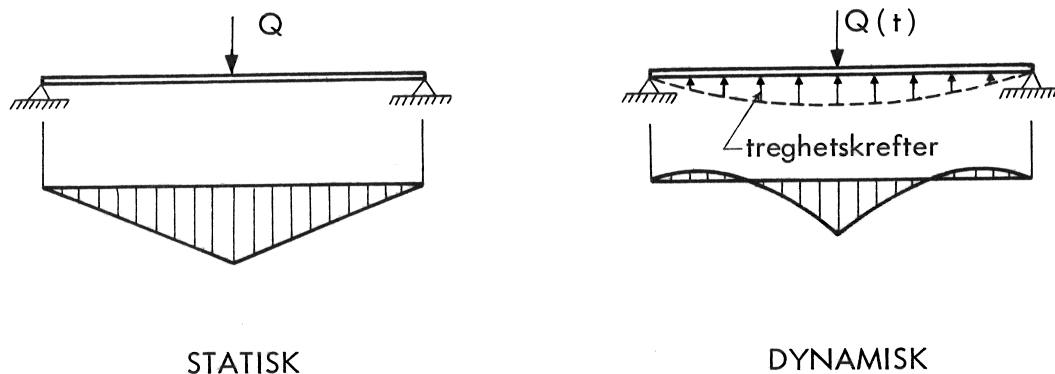
Figur 2.9: Sammenheng mellom isens egenskaper og temperatur ved en forholdsvis høy tøyningsrate. **1:** Young's modul som funksjon av temperaturen, **2a og 3a:** Henholdsvis enakset strekk- og trykkstivhet som funksjon av temperaturen ifølge D. Carter (1970), **2b og 3b:** Henholdsvis enakset strekk- og trykkstivhet som funksjon av temperatur ifølge F.D Haynes (1978) [1].

## 2.2 Dynamisk analyse

I dynamisk analyse er man interessert i bevegelsen til systemer. Et dynamisk system adskiller seg fra et statisk system blant annet ved at det:

- Er tidsavhengig
- Påvirkes av treghetskrefter

Den vesentlige forskjellen ligger i treghetskraftene [6].



Figur 2.10: Moment på grunn av statisk og dynamisk belastning [6].

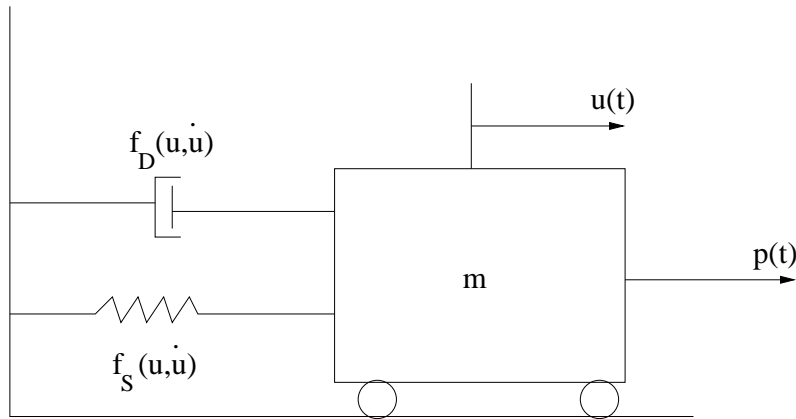
Et systems treghet uttrykker systemets motvilje til å endre bevegelsestilstand. Det må ytre krefter til. Dette er definert ved *Newtons første lov*. Systemet vil reagere med en like stor og motsatt rettet reaksjonskraft. Dette er treghetskraften. Den er lik produktet av systemets masse og dets akselerasjon, og virker i motsatt retning av akselerasjonen [7]. Ifølge *D'Alemberts prinsipp* vil et system være i dynamisk likevekt ved et hvert tidspunkt dersom treghetskraftene er inkludert i kraftregnskapet.

I mekanikken er frihetsgradene til et system definert som det antall uavhengige forskyvninger som er nødvendig for å bestemme den relative forskyvningen mellom systemets masser og deres likevektsposisjon [7]. I det videre skal vi se på dynamisk analyse av enkle konstruksjoner med én frihetsgrad og mer kompliserte systemer med uendelig mange frihetsgrader hvor det vil fokuseres på slanke konstruksjoner.

### 2.2.1 Enkle systemer

Enkle konstruksjoner, som for eksempel et vanntårn, kan, under visse forutsetninger, sees på som en konsentrert masse,  $m$ , holdt oppe av en masseløs anordning (konstruksjon) med stivhet  $k$  [7]. Vi kaller slike systemer én-frihetsgradssystemer

ettersom det kun er forskyvningen til én masse som beskriver forskyvningen til hele konstruksjonen. Figur 2.11 viser en enkel modell av et én-frihetsgradssystem.



Figur 2.11: Enkel modell av et én-frihetsgradssystem.

Dersom et slikt én-frihetsgradssystem utsettes for en tidsavhengig last,  $p(t)$ , kan den påfølgende bevegelsen,  $u(t)$ , beskrives ved hjelp av differensialligningen

$$m\ddot{u} + f_D(u, \dot{u}) + f_S(u, \dot{u}) = p(t).$$

Leddene  $m\ddot{u}$ ,  $f_D(u, \dot{u})$  og  $f_S(u, \dot{u})$ , betegner henholdsvis treghetskrefter, dempningskrefter og gjennopprettende krefter. Alle virker i motstatt retning av bevegelsen,  $u(t)$ .

For lineære systemer er forholdet mellom den gjennopprettende kraften,  $f_S$ , og forskyvningen lineært:

$$f_S = -ku.$$

Dempningskraften beskriver energien som forsvinner fra systemet som følge av ulike mekanismer, og for svært mange systemer er det en lineær sammenheng mellom denne og hastigheten:

$$f_D = -c\dot{u}.$$

Konstanten  $c$  betegner den viskøse dempningskoeffisienten.

### 2.2.2 Dynamisk analyse av slanke konstruksjoner

Slanke konstruksjoner kjennetegnes litt upresist ved at de er lange i forhold til tverrsnittet. Fra bjelketeori kjenner vi slankhetsraten som  $L/r$ , der  $L$  er konstruksjonens lengde og  $r = \sqrt{I/A}$  er treghetsradiusen. Her er  $A$  konstruksjonens tverrsnittsareal og  $I$  tverrsnittets andre arealmoment. For en bjelke med rektangulært tverrsnitt betyr det at slankhetsraten bestemmes av forholdet mellom lengden og tverrsnittets høyde.

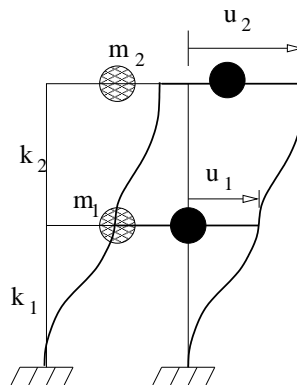
## 2. TEORI

---

Slanke konstruksjoner er gjerne nokså fleksible, og den dynamiske oppførselen karakteriseres av lange naturlige svingeperioder og lave egenfrekvenser.

I motsetning til én-frihetsgradsystemer hvor konstruksjonens masse kan knyttes til ett diskret punkt så vil den for en slank konstruksjon være fordelt gjennom hele konstruksjonen. Et slikt system har dermed uendelig mange frihetsgrader og kan deformeres i uendelig mange former.

Enkelte slanke konstruksjoner som for eksempel fler-etasjes bygninger kan forenkles til et diskret system med konsentrerte masser. Et slikt system består av en sammensetning av stive elementer med masse, og masseløse elementer som er fleksible. Antall frihetsgrader i systemet er nå begrenset av antall konsentrerte masser. Figur 2.12 viser en toetasjes bygning forenklet til et system med to frihetsgrader,  $u_1$  og  $u_2$ . Massen til bygningen er fordelt igjennom hele konstruksjonen, men under antagelsen om at gulv-/takbjelkene er stive og tunge og de bærende søylene er mykere og lettere, kan bygningen modelleringsmessig betraktes som et system der all masse er konsentrert i taket i hver etasje mens de elastiske egenskapene er knyttet til søylene.

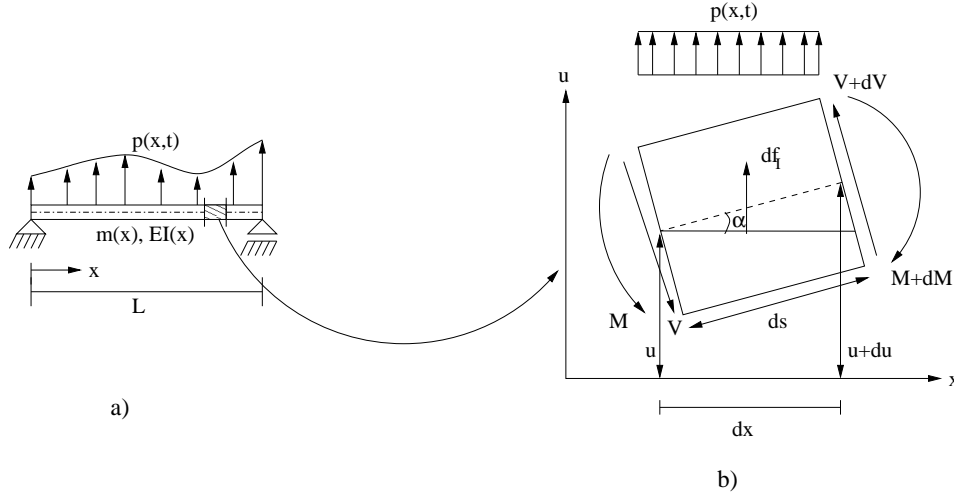


Figur 2.12: Toetasjes bygning som diskretisert system med konsentrerte masser.

Denne metoden, om enn anvendelig, er imidlertid ikke en naturlig fremgangsmåte for kontinuerlige konstruksjoner som broer, piper, rør etc. hvor massen og stivheten er mer jevnt fordelt. Dersom vi ser for oss en fritt opplagt bjelke med masse per lengdeenhet,  $m(x)$ , og stivhet,  $EI(x)$ , utstatt for en tverrlast,  $p(x, t)$ , kan vi utlede en ligning som beskriver den transverselle bevegelsen,  $u(x, t)$ , ved å se på likevekt av et infinitesimalt element, se figur 2.13.

Vi forutsetter at:

- Normalspenninger på plan parallelle med bjelkeaksen kan neglisjeres.
- Plane tverrsnitt forblir plane (Naviers hypotese).
- Materialet er lineært elastisk.



Figur 2.13: System med fordelt masse og elastisitet: a) bjelke og påkjent kraft b) krefter på element [7].  $df_I = -m\ddot{u}dx$ .

- Små rotasjoner

Dette medfører blant annet at:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad ds \approx dx$$

Kraftlikevekt i vertikalretningen gir

$$\begin{aligned} p(x,t)dx - V + \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - m\ddot{u}dx &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= m\ddot{u} - p(x,t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

og fra momentlikevekt om linjen  $x + dx$  får vi

$$-M + \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - Vdx + p\frac{dx^2}{2} - m\ddot{u}\frac{dx^2}{2} = 0. \quad (2.3)$$

Vi dividerer nå momentlikevektslikningen, (2.3), med  $dx$  og lar  $dx \rightarrow 0$ , slik at

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} - V &= 0 \\ \Downarrow \\ V &= \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned}$$

som innsatt i kraftlikevektslikningen, (2.2), gir

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = m\ddot{u} - p(x, t). \quad (2.4)$$

Fra bjelketeori har vi følgende forhold mellom moment og krumning:

$$M = -EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

som innsatt i ligning (2.4) gir den dynamiske likevektslikningen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m\ddot{u} = p(x, t). \quad (2.5)$$

Løsningen av ligning (2.5) er nå entydig bestemt av systemets rand- og initialbetingelser.

### Skjærdeformasjon og rotasjonstregghet

I utledningen av den dynamiske likevektslikningen, (2.5), ble det ikke tatt hensyn til effekten av rotasjonstregghet og skjærdeformasjoner. Analysen som tar hensyn til disse effektene kalles *Timoshenko bjelketeori* [7]. Følgende ligning for fri svingning av en bjelke, hvor  $m(x) = m$  og  $EI(x) = EI$ , inkluderer disse effektene:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - mr^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m^2 r^2}{\kappa G A} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0, \quad (2.6)$$

hvor  $G$  er skjærmodulen,  $A\kappa$  effektivt skjærareal og  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  er treghetsradiusen [8].

For en fritt opplagt bjelke kan vi anta en løsning på formen  $u(x, t) = C_1 \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\omega'_n t)$ , der egenfrekvensen er betegnet med  $\omega'_n$  dersom skjær- og rotasjonstregghetseffekter er inkludert og  $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$  dersom de er neglisjert. Innsatt i (2.6) gir dette frekvenslikningen:

$$(1 - \Omega_n^2) - \Omega_n^2 \left( \frac{n\pi r}{L} \right)^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) + \Omega_n^4 \left( \frac{n\pi r}{L} \right)^4 \frac{E}{\kappa G} = 0, \quad (2.7)$$

der  $\Omega_n = \frac{\omega'_n}{\omega_n}$  [7].

Vi husker at slankhetsraten til en bjelke er definert som  $\frac{L}{r}$ . Hvis vi antar at  $\frac{nr}{L} \ll 1$ , så forenkles frekvenslikningen (2.7) til

$$\omega'_n = \omega_n \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi r/L)^2 (1 + E/\kappa G)}}. \quad (2.8)$$

Korreksjonen på grunn av rotasjonstregghet og skjærdeformasjon er representert av henholdsvis  $(n\pi r/L)^2$  og  $(n\pi r/L)^2 (1 + E/\kappa G)$  i nevneren [7].



Verdier for  $\omega'_n/\omega_n$  som funksjon av  $nr/L$  er vist i figur 2.14 for typiske verdier av  $E/\kappa G$ . Vi ser også et plot som viser sammenhengen mellom  $\omega'_n/\omega_n$  og  $r/L$  for de fem første egenfrekvensene til en bjelke med  $E/\kappa G = 3.2$  (tilnærmet verdi for stålbjelker med rektangulært tverrsnitt [7]). Her er også den tilnærmede verdien fra (2.8) tatt med. Vi ser at effektene fra skjærdeformasjon og rotasjonstregghet fører til at egenfrekvensene blir lavere. For en bestemt verdi av  $E/\kappa G$  øker frekvensreduksjonen med den inverse av slankhtesraten. Dette betyr at rotasjonstregghet og skjærdeformasjoner har liten effekt på slanke konstruksjoner, og ligning (2.5) vil derfor gi en svært god tilnærming av den transverselle bevegelsen til en tilstrekkelig slank konstruksjon.

### 2.2.3 Løsning av dynamisk likevektsligning

Den dynamiske likevektsligningen (2.5) er en fjerdeordens, inhomogen, partiell differensialligning. Løsningsprosedyren går over flere steg:

#### Fri svingning, egensvingemoder og egenfrekvenser

I første omgang ser vi på den homogene delen av den dynamiske likevektsligningen. Dette tilsvarer fri svingning. Da blir ligningen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m(x) \ddot{u} = 0. \quad (2.9)$$

Vi antar nå at løsningen kan skrives på formen

$$u(x, t) = \phi(x)q(t). \quad (2.10)$$

Dette kalles separasjon av variable. Ligning (2.10) satt inn i (2.9) gir to nye ligninger:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \\ [EI(x)\phi''(x)]'' - \omega^2 m(x)\phi(x) &= 0, \end{aligned}$$

der  $\omega$  er egenfrekvensen. I tilfellet hvor  $EI(x) = EI$ , og  $m(x) = m$  kan vi nå skrive:

$$\phi''''(x) - \beta^4 \phi(x) = 0, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}. \quad (2.11)$$

Ligning (2.11) har generell løsning

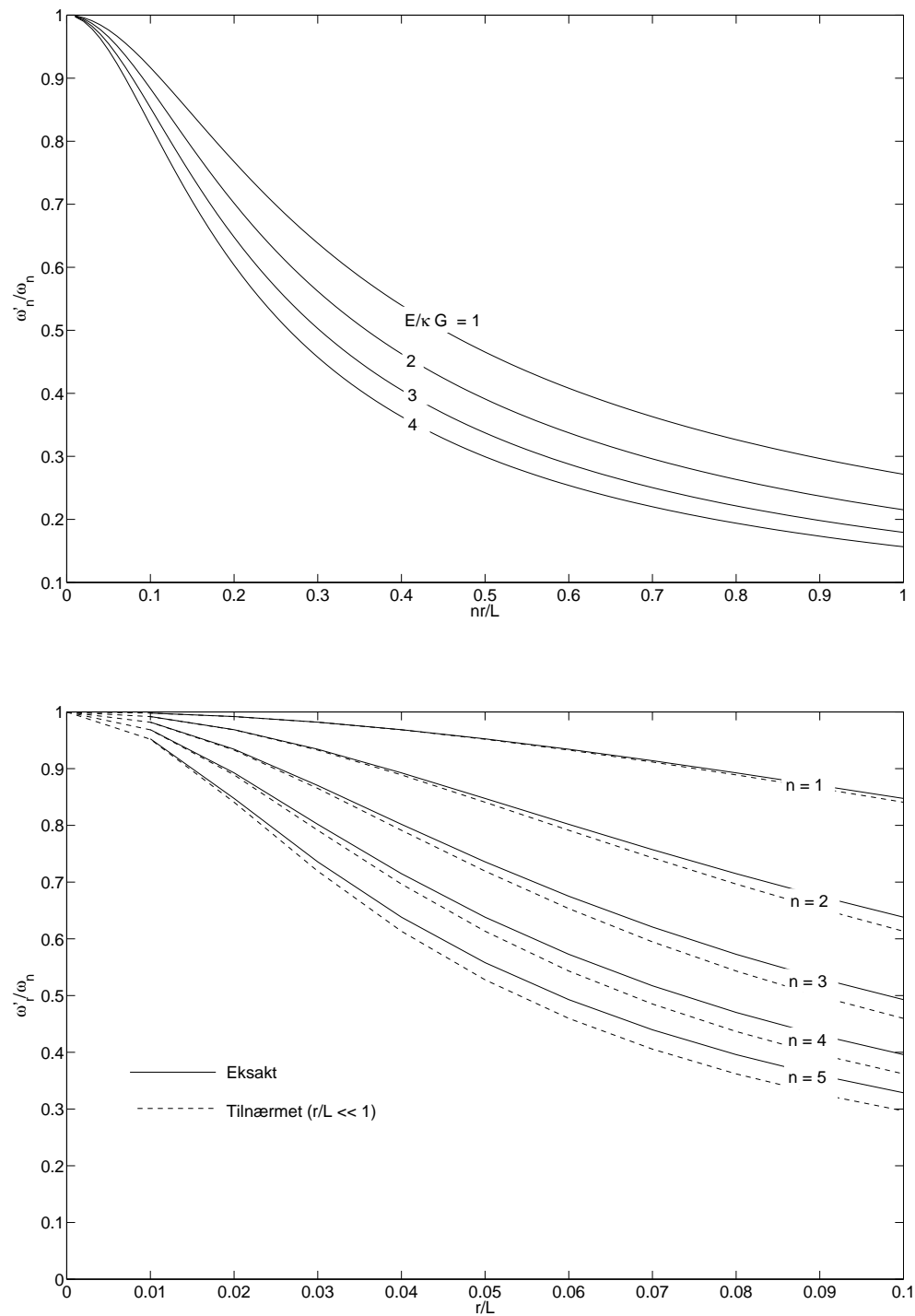
$$\phi(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x, \quad (2.12)$$

som anvendt sammen med systemets randbetingelser fører til et ligningssystem med fire ligninger. Dette kan typisk skrives på formen:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

## 2. TEORI

---



Figur 2.14: **Øverst:** Rotasjonstreghetens og skjærdeformasjonens innvirkning på egenfrekvensen til en fritt opplagt bjelke. **Nederst:** Frekvensreduksjon som funksjon av invers slankhetsrate for de fem første egenfrekvensene til en fritt opplagt stålbjelke.

der vektoren  $\mathbf{c}$  inneholder de ukjente koeffisientene  $C_1 - C_4$ . Vi kjenner igjen dette som et egenverdiproblem, og for ikke-triviell løsning av ligningssystemet krever vi at  $\det(A) = 0$ . Dette leder til systemets *karakteristiske ligning*. Denne ligningen kan løses for egenverdiene  $\beta$ . I prinsippet vil vi ha uendelig mange løsninger  $\beta_n$ . For hver løsning  $\beta_n$  får vi tilhørende egenfrekvens  $\omega_n$  fra (2.11). Når denne verdien settes tilbake i ligningssystemet (2.13), kan vi løse dette for tre av de fire ukjente koeffisientene. Dette gir egensvingemoden  $\phi_n(x)$ .

### Ortogonalitetssegenskaper

En nyttig egenskap ved egensvingemodene  $\phi_n(x)$  er at de er ortogonale med hensyn på hverandre i den forstand at de tilfredsstiller følgende sammenhenger:

$$\begin{aligned} \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx &= 0, \quad n \neq r \\ \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]'' dx &= 0, \quad n \neq r. \end{aligned}$$

Med egensvingemodene,  $\phi_n(x)$ , kjent kan løsningen av ligning (2.5) skrives som en lineærkombinasjon av svingemodene:

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t). \quad (2.14)$$

Det kan nå vises at ligning (2.5) kan transformeres til et sett av uendelig mange ordinære differensialligninger som hver har en ukjent modal koordinat  $q_n(t)$ . For å gjøre denne transformasjonen setter vi (2.14) inn i ligning (2.5), multipliserer med  $\phi_n(x)$ , integrerer og benytter ortogonalitetssegenskapene. Dette leder frem til følgende ligningssett:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t),$$

der

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^L m(x) (\phi_n(x))^2 dx \\ K_n &= \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_n''(x)]'' dx \\ \text{og} \\ P_n(t) &= \int_0^L p(x, t) \phi_n(x) dx. \end{aligned}$$

Vi betegner  $M_n$ ,  $K_n$  og  $P_n$  som henholdsvis generalisert masse, stivhet og last.

Så snart  $q_n(t)$  er bestemt er forskyvningsbidraget fra den  $n$ -te svingemoden gitt som:

$$u_n(x, t) = \phi_n(x) q_n(t),$$

og den totale forskyvningen ved ligning (2.14).

Når vi kjenner forskyvningen,  $u(x, t)$ , er henholdsvis moment- og skjærkraftfordelingen gitt ved:

$$M(x, t) = -EI(x)u''(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} EI(x)\phi_n''(x)q_n(t) \quad (2.15)$$

og

$$V(x, t) = -[EI(x)u''(x)]' = -\sum_{n=1}^{\infty} [EI(x)\phi_n''(x)]' q_n(t). \quad (2.16)$$

### Modal superposisjon

Ligning (2.14) gav den totale forskyvningen,  $u(x, t)$ , som en lineærkombinasjon av svingemodene. I svært mange svingeproblemer er svingebildet bestemt av de laveste svingemodene, og bidragene fra de høyere svingemodene blir ubetydelige. Det er derfor vanligvis tilstrekkelig å ta med bare de laveste svingemodene i analysen. Det er imidlertid viktig å merke seg at spennings- eller kraftberegninger vanligvis krever flere svingemoder i superposisjonen for å oppnå ønsket nøyaktighet. Det skyldes at de deriverte av forskyvningene inngår i spenningsberegningene (se ligning (2.15) og (2.16)) [6].

## 2.3 RIFLEX

I dette kapittelet gis en kort presentasjon av programmet RIFLEX. Kapittelet baserer seg i hovedsak på *RIFLEX User's Manual* [9] og *RIFLEX Theory Manual* [10], og det henvises til disse for ytterligere informasjon. Det er lagt vekt på de deler av teorien som er sentrale for denne masteroppgaven.

RIFLEX er et program utviklet spesielt for analyse av fleksible marine stigerørsystemer, men er også godt egnet til analyse av andre typer slanke konstruksjoner, som for eksempel forankringslinjer eller stålrør. Programmet utfører statiske så vel som dynamiske beregninger. Den statiske analysen omhandler i hovedsak likevektsberegninger og muligheten til å forandre på ulike parametre. Den dynamiske analysen omhandler egenverdianalyse, respons fra harmonisk bevegelse og harmonisk bølgeeksitasjon og respons fra irregulær bevegelse og irregulær bølgeeksitasjon.

### 2.3.1 Kontinuumsmekanikk

Det teoretiske grunnlaget for RIFLEX er basert på kontinuumsmekanikken. Dette innebærer blant annet:

- *Lagrange-beskrivelse* av partikkelbevegelsen.
- Tøyninger målt i form av *Greens tøyningstensor* og samsvarende *Piola-Kirchoff-spenninger*.
- Likevekt beskrives ved hjelp av virtuelt arbeid.

En *Lagrange-beskrivelse* av partikkelbevegelsen betyr at den er beskrevet i forhold til et fast globalt koordinatsystem. Hver partikkel identifiseres av en posisjonsvektor  $\mathbf{X}$  i forhold til en tilfeldig valgt referansetilstand. Partikkelen eller konstruksjonen er altså ikke beskrevet med utgangspunkt i hvor den er, men hvor den opprinnelig var [11].

I RIFLEX fremstilles stavelementer ved hjelp av en *total Lagrange-beskrivelse*, som betyr at referanseposisjonen er den initielle posisjonen. Spenninger og tøyninger er referert til denne. Bjelkeelementer fremstilles gjennom en *korotert beskrivelse*, hvor referanseposisjonen er delt i to. Spenninger og tøyninger er målt i medrotert konfigurasjon, mens stivlegemebevegelser er målt i forhold til initieell posisjon [11].

### 2.3.2 Elementformulering

Selve konstruksjonsanalysen i RIFLEX bygger på elementmetoden. De viktigste egenskapene ved denne formuleringen er:

- Ubegrensede rotasjoner og translasjoner (i 3-D).

- Bjelke- og stavelementer basert på teori om små tøyninger.
- Bruk av både bjelke- og stavelementer i modelleringen.
- Beskrivelse av ikke-lineære materialeegenskaper.
- Stivhetsbidrag fra materialeegenskapene.
- Geometrisk stivhet.

Disse egenskapene er, ifølge *RIFLEX Theory Manual*, avgjørende for en tilfredsstillende modellering og analyse av slanke konstruksjoner.

### Bjelkeelementer

Bjelkeelementer modelleres i RIFLEX med tre translasjons- og tre rotasjonsfrihetsgrader i hver node. Følgende antagelser gjelder:

- Plane tverrsnitt forblir plane.
- Tverrkontraksjoner neglisjeres.
- Små tøyninger.
- Skjærdeformasjoner på grunn av tverrlaster neglisjeres, men St. Venant-torsjon tas med.
- Koblingseffekter mellom torsjon og bøyning neglisjeres.

Nodeforskyvningene i aksialretning, samt for rotasjon, interpoleres ved hjelp av lineære interpolasjonsfunksjoner. Nodeforskyvningene i de transverselle retningene interpoleres ved hjelp av kubiske interpolasjonsfunksjoner.

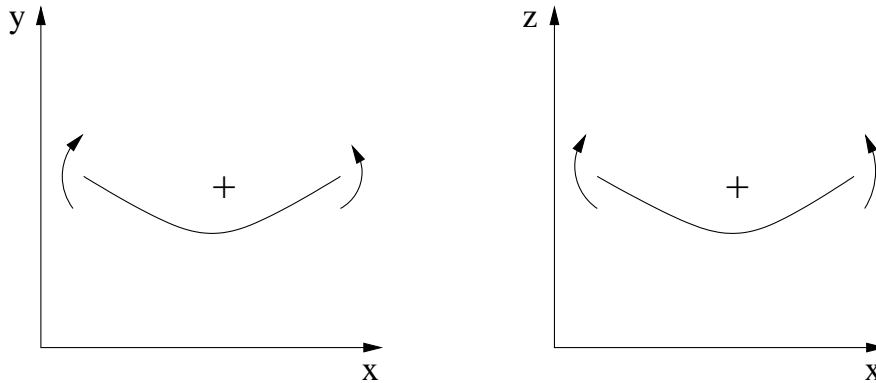
Fortegnskonvensjonen for momenter er definert som i figur 2.15

### 2.3.3 Statisk elementanalyse

Hensikten med den statiske analysen er å bestemme nodeforskyvningene til det modellerte systemet slik at det er i statisk likevekt. Både forskyvninger og rotasjoner er gitt relativt til en spenningsfri referansekonfigurasjon som defineres i modelleringen. Den statiske likevektskonfigurasjonen er beskrevet som løsningen av følgende ligningssystem:

$$\mathbf{R}^S(\mathbf{r}) = \mathbf{R}^E(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

- hvor  $\mathbf{r}$  — nodeforskyvningsvektoren for alle systemfrihetsgradene.  
 $\mathbf{R}^S$  — vektor som inneholder de indre reaksjonskreftene.  
 $\mathbf{R}^E$  — vektor som inneholder de ytre lastene.



Figur 2.15: Fortegnskonvensjon for momenter.

Både de indre reaksjonskreftene og de ytre lastene er generelt ikke-lineære funksjoner av nodeforskyvningsvektoren. Numerisk beregnes statisk likevekt ved hjelp av en inkrementell lastmetode med likevektsiterasjoner for hvert lastskritt. Prinsippet bak denne fremgangsmåten er å samle opp de ytre lastene over et visst antall små lastskritt. Den statiske konfigurasjonen ved hvert skritt finnes så ved iterativ løsning av ligning (2.17) for den oppsamlede lastvektoren ved å bruke forskyvningsvektoren fra forrige skritt som startløsning.

For systemer der bøyestivheten har lite å si for den statiske likevektskonfigurasjonen, kan systemet i første omgang tilnærmes som en kjetting/catenary uten bøyestivhet. Startkonfigurasjonen kan da enkelt finnes ved løsning av catenary-ligningen.

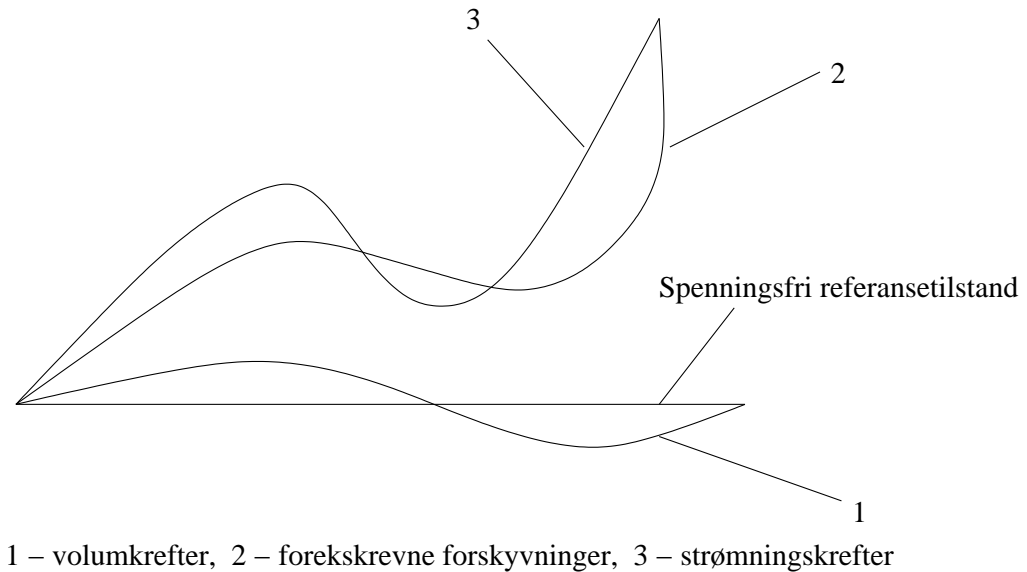
### Inkrementell likevektsiterasjon

En kraftubalansevektor defineres for lastskritt  $k$  som

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_k^S(\mathbf{r}) - \mathbf{R}_k^E(\mathbf{r}).$$

Den statiske likevektskonfigurasjonen ved lastskritt  $k$  styres av null kraftubalanse, og kan nå finnes ved hjelp av *Newton-Raphson-iterasjon*. Startverdiene for likevektsiterasjonen er basert på den statiske likevektskonfigurasjonen fra forrige lastskritt.

Med utgangspunkt i den spenningsfrie konfigurasjonen er den inkrementelle lastmetoden organisert i en rekke lasttilstander som påføres inkrementelt. Lasttilstandene består gjerne av en eller flere lasttyper. Eksempler kan være volumkrefter, foreskrevne forskyvninger og foreskrevne krefter. Et eksempel på konfigurasjoner etter påførsel av ulike lasttilstander er vist i figur 2.16.



Figur 2.16: Inkrementell lastsekvens.

### 2.3.4 Dynamisk analyse

Dynamisk likevekt av et diskretisert system kan skrives som

$$\mathbf{R}^I(\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{R}^D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{R}^S(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}^E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, ) \quad (2.18)$$

hvor  $\mathbf{R}^I$  – vektor med treghetskreftene  
 $\mathbf{R}^D$  – vektor med dempningskreftene  
 $\mathbf{R}^S$  – vektor med indre reaksjonskrefter  
 $\mathbf{R}^E$  – vektor med ytre laster  
 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$  – forskyvnings-, hastighets- og akselerasjonsvektorer

Dette er et system av ikke-lineære differensialligninger.

De viktigste ikke-lineære effektene det bør tas hensyn til i analyse av slanke marine konstruksjoner, er:

- Geometrisk stivhet.
- Ikke-lineære materialegenskaper.
- Hydrodynamiske laster uttrykt ved relative hastigheter.
- Integrasjon av laster til faktisk overflatehevning.
- Kontaktproblemer (kontakt med havbunn, kollisjoner, etc).



I RIFLEX er det i hovedsak tre dynamiske analyseformer tilgjengelig: Ikke-lineær analyse i tidsplanet, lineær analyse i tidsplanet og analyse i frekvensplanet. Forskjellen mellom disse er først og fremst hvordan de behandler de nevnte ikke-linearitetene, men felles for alle er at de baserer seg på numerisk tidsintegrasjon.

I denne oppgaven er det analyse i tidsplanet som vil benyttes, og det er disse analyseformene som vil omtales i det videre.

### Metoder for numerisk tidsintegrasjon

Den skrittvis numeriske integrasjonen av de dynamiske likevektslikningene baserer seg på *Newmarks  $\beta$ -familie* samt *Wilsons  $\theta$ -metode*. Disse metodene kan anvendes i ikke-lineær så vel som lineær analyse. Følgende sammenheng mellom forskyvnings-, hastighets- og akselerasjonsvektorene ved tiden  $t$  og  $t + \Delta\tau$  er benyttet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta\tau} &= \dot{\mathbf{r}}_t + (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{r}}_t\Delta\tau + \gamma\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta\tau}\Delta\tau \\ \mathbf{r}_{t+\Delta\tau} &= \mathbf{r}_t + \dot{\mathbf{r}}_t\Delta\tau + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{r}}_t(\Delta\tau)^2 + \beta\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta\tau}(\Delta\tau)^2\end{aligned}$$

hvor  $\Delta\tau = \theta\Delta t$ ,  $\theta \geq 1$ .

Parametrene  $\gamma$ ,  $\beta$  og  $\theta$  definerer variasjonen i forskyvning, hastighet og akselerasjon over tidsskrittet  $\Delta t$  og bestemmer metodens egenskaper, som stabilitet og nøyaktighet. Verdier for  $\gamma$ ,  $\beta$  og  $\theta$  og samsvarende integrasjonsteknikker er gjengitt i tabell 2.1. Metodene er implisitte for  $\beta > 1$ .

Tabell 2.1: Metoder for numerisk tidsintegrasjon.  $\theta = 1$  gir *Newmarks  $\beta$ -familie*.

Metode	$\gamma$	$\beta$	$\theta$
Sentral differansem metode	1/2	0	1
Fox-Goodwins metode	1/2	1/12	1
Lineær akselerasjon	1/2	1/6	1
Konstant gjennomsnittsakselereasjon	1/2	1/4	1
Wilsons $\theta$ -metode	1/2	1/6	$> 1$

### Ikke-lineær dynamisk analyse

Den inkrementelle formen av den dynamiske likevektslikningen, (2.18), finnes ved å se på dynamisk likevekt av to konfigurasjoner et kort tidsrom  $\Delta t$  fra hverandre:

$$(\mathbf{R}_{t+\Delta t}^I - \mathbf{R}_t^I) + (\mathbf{R}_{t+\Delta t}^D - \mathbf{R}_t^D) + (\mathbf{R}_{t+\Delta t}^S - \mathbf{R}_t^S) = (\mathbf{R}_{t+\Delta t}^E - \mathbf{R}_t^E). \quad (2.19)$$

Ligning (2.19) sier at en inkrementell forandring i den ytre lasten er balansert av inkrementelle forandringer i reaksjonskreftene  $\mathbf{R}^I$ ,  $\mathbf{R}^D$  og  $\mathbf{R}^S$  over tidsintervallet  $\Delta t$ .

Ved numerisk løsning lineariseres ligning (2.19) ved å innføre den tangentielle masse-, dempnings-, og stivhetsmatrisen ved begynnelsen av hvert tidsskritt. Disse matrisene representerer henholdsvis massen, dempningen og stivheten til systemet som en respons til små forandringer i konfigurasjonen. Den lineariserte inkrementelle ligningen kan nå skrives som

$$\mathbf{M}_t \Delta \ddot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{C}_t \Delta \dot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{r}_t = \Delta \mathbf{R}_t^E, \quad (2.20)$$

der  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$  og  $\mathbf{K}_t$  er den tangentielle masse-, dempnings- og stivhetsmatrisen ved tiden  $t$ .  $\Delta \mathbf{r}_t$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{r}}_t$ ,  $\Delta \ddot{\mathbf{r}}_t$  og  $\Delta \mathbf{R}_t^E$  er den inkrementelle forskyvningen, hastigheten, akselerasjonen og ytre lasten gitt ved:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_t &= \mathbf{r}_{t+\Delta t} - \mathbf{r}_t \\ \Delta \dot{\mathbf{r}}_t &= \dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{r}}_t \\ \Delta \ddot{\mathbf{r}}_t &= \ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{r}}_t \\ \Delta \mathbf{R}_t^E &= \mathbf{R}_{t+\Delta t}^E - \mathbf{R}_t^E \end{aligned}$$

For å redusere feilen som introduseres ved bruk av de tangentielle matrisene, defineres en kraft-restvektor

$$\delta \mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^E - (\mathbf{R}_{t+\Delta t}^I + \mathbf{R}_{t+\Delta t}^D + \mathbf{R}_{t+\Delta t}^S),$$

som uttrykker et kraftoverskudd som følge av endringer i masse, dempning og stivhet over tidsskrittet. Kraft-restvektoren inkluderes i den lineariserte inkrementelle dynamiske likevektsligningen (2.20). For å oppnå likevekt ved slutten av hvert tidsskritt kan en iterativ *Newton-Raphson*- eller en *modifisert Newton-Raphson-metode* nå benyttes innenfor hvert tidsskritt. Dette er ikke ulikt metoden benyttet i den statiske analysen.

### Lineær dynamisk analyse

Den lineære analysen baserer seg på linearisering av de dynamiske likevektsligningene med hensyn på tregghets-, dempnings- og stivhetskreftene ved statisk likevekt i henhold til ligning (2.21).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R}^E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t}). \quad (2.21)$$

- |      |   |   |  |
|------|---|---|--|
| hvor | $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$                      | – | tangentiell masse-, stivhets- og dempningsmatrise evaluert ved statisk likevekt.   |
|      | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{tot} - \mathbf{r}_{stat}$       | – | dynamisk forskyvningsvektor relativ til statisk posisjon.  |
|      | $\mathbf{R}^E = \mathbf{R}_{tot}^E - \mathbf{R}_{stat}^E$ | – | dynamisk lastvektor som uttrykker differansen mellom den totale ytre lastvektoren og den ytre lastvektoren ved statisk likevekt. |

Systemmatrisene holdes konstante gjennom hele den numeriske integrasjonen, og den dynamiske forskyvningsvektoren kan finnes ved tilbakesubstitusjon ved hvert tidsskritt.

Den ytre lastvektoren beregnes ved statisk likevekt, og dette betyr at den eneste ikke-lineariteten i de ytre lastene er det hydrodynamiske dragleddet uttrykt ved kvadratisk relativ hastighet.

### **Lineær eller ikke-lineær analyse?**

Riktig valg av analysemetode er avgjørende for gode resultater i RIFLEX. Den ikke-lineære analysen tar hensyn til alle ikke-lineære effekter og vil dermed gi de mest nøyaktige resultatene. Denne metoden kan imidlertid være svært krevende regnemessig, uten at nøyaktigheten øker nevneverdig. Avhengig av systemet som skal analyseres, kan det derfor være nyttig å se på noen retningslinjer i valg av analysetype. *RIFLEX Theory Manual* anbefaler bruk av ikke-lineær analyse dersom minst en av de følgende ikke-lineære fenomenene er av betydning for dynamisk respons av systemet:

- Ikke-lineære materialeegenskaper.
- Tidsavhengig variasjon av geometrisk stivhet forårsaket av betydelige variasjoner i strekk og geometri.
- Sammenstøt mellom stigerør og støttefartøy.
- Konstruksjonen blir utsatt for store dynamiske rotasjoner i 3-D. Ikke-lineær analyse kreves for å gi en tilstrekkelig fremstilling av momenter og krumning.



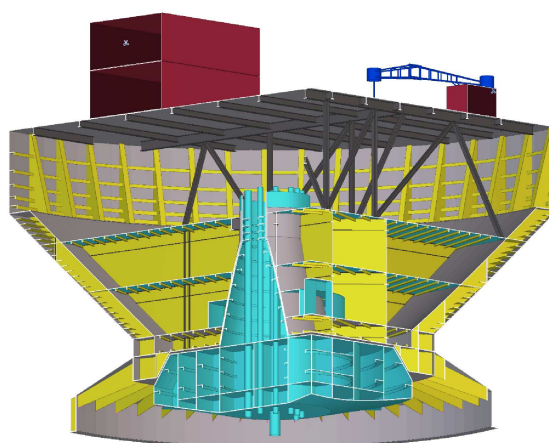
# Kapittel 3

## Løsning av problem

Som beskrevet innledningsvis vil en kontrollbøye i dravis oppleve en dynamisk bevegelse som følge av blant annet isbrytningsprosessen. Denne bevegelsen vil igjen indusere en dynamisk eksitasjon av stigerøret. I dette kapittelet skal vi studere den dynamiske bevegelsen til både kontrollbøyen og stigerøret i detalj. Vi skal se på ulike metoder for å beskrive stigerørbevegelsen både analytisk og ved hjelp av spesialtilpasset programvare.

### 3.1 Dynamisk bevegelse av kontrollbøyen basert på tester

Kontrollbøyen som omtales i oppgaven er vist i figur 3.1.



Figur 3.1: Kontrollbøyen som studeres i oppgaven.

### 3. LØSNING AV PROBLEM

---

FORCE Technology har utført flere tester for en slik kontrollbøye i drivis, hvor de blant annet har studert den dynamiske bevegelsen til bøyen og beregnet kreftene fra fortøyingssystemet på bakgrunn av disse testene. Dersom vi tar utgangspunkt i posisjonen hvor kreftene fra bøyen og forankringslinene får isen til å svikte, går det frem av testene at bevegelsen til bøyen kan deles i to faser:

**Fase 1** hvor isen har sprukket, og forankringslinene trekker bøyen tilbake mot dens opprinnelige posisjon.

**Fase 2** hvor bøyen har blitt trukket så langt tilbake mot opprinnelig posisjon at den kolliderer med isen. Isen skyver på ny bøyen foran seg inntil den igjen svikter som følge av kreftene fra bøyen og forankringslinene.

Testene har vist at det dannes en sprekke på omtrent fem meter, kalt isens sprekkelengde, hvor bøyen kan trekkes fritt tilbake før den støter mot isen og bevegelsen gjentas.

Avstanden isen kan skyve bøyen før den svikter er en funksjon som styres i hovedsak av istykkelsen. Sammen med drivhastigheten regnes denne avstanden som kjent. Dette gjør at vi lett kan bestemme bøyebevegelsen i fase 2 som en lineær funksjon. I fase 1, der bøyen trekkes tilbake av forankringslinene, kan problemet betraktes som et system med én frihetsgrad, beskrevet av figur 3.2, der

$m_b$	Bøyens masse.
$m_{ba}$	Bøyens adderte masse <sup>1</sup> .
$m_{bv}$	Massen til vannet under bøyens skjørtekant.
$f_S(u_b)$	Gjennopprettende krefter fra forankringssystemet som funksjon av bøyens forskyvning.
$f_D(\dot{u}_b)$	Dempningskrefter i form av viskøst drag <sup>1</sup> .

Bevegelsen til bøyen i fase 1 kan nå beskrives ved hjelp av ligningen:

$$(m_b + m_{ba} + m_{bv})\ddot{u}_b + f_D(\dot{u}_b) + f_S(u_b) = 0, \quad (3.1)$$

og initialbetegnelse

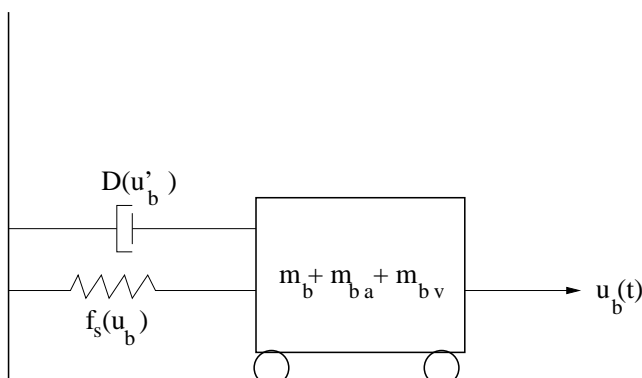
$$u_b(0) = u_{b0}, \quad \dot{u}_b(0) = \dot{u}_{b0}. \quad (3.2)$$

Den gjennopprettende kraften,  $f_S(u_b)$ , fra forankringssystemet, er avhengig av forskyvningen til bøyen. Beregningene basert på testene er gjengitt i figur 3.3. Ved å anta at de gjennopprettende kreftene kan beskrives ved hjelp av et 4. grads polynom, og ved å benytte minste kvadraters metode, kan vi fra disse dataene bestemme den gjennopprettende kraften som:

$$f_S(u_b) = 10^4(-0.0002u_b^4 + 0.0221u_b^3 - 0.8164u_b^2 - 1.0562u_b - 8.8578)$$

---

<sup>1</sup>Mer om addert masse og viskøst drag i Vedlegg B.

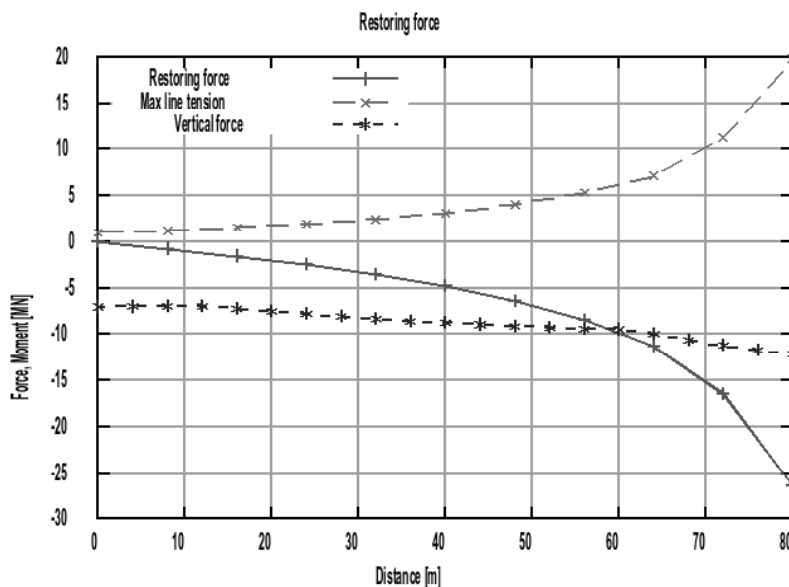


Figur 3.2: Kontrollbøyen betraktet som et én-frihetsgradssystem. Det viskøse draget er illustrert som en støddemper, og de gjennopprettende kreftene fra forløyningssystemet som en fjær.

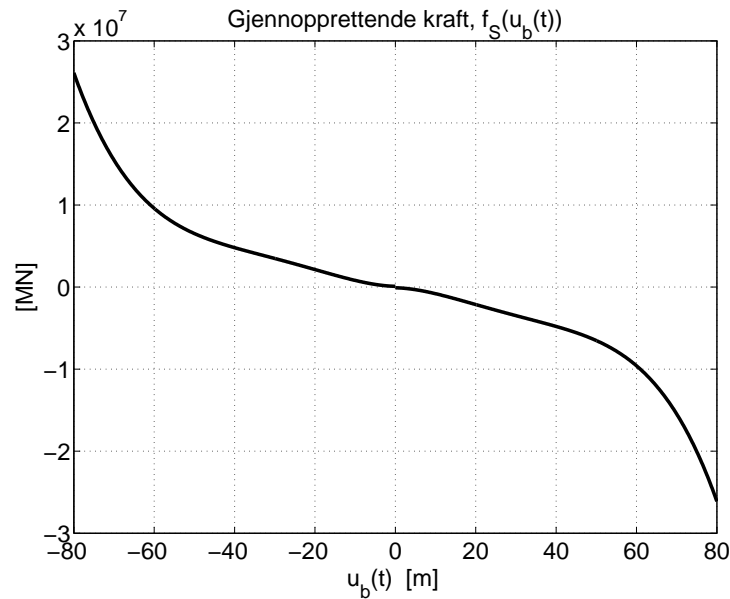
og

$$f_S(u_b) = 10^4(0.0002u_b^4 + 0.0221u_b^3 - 0.8164u_b^2 - 1.0562u_b + 8.8578),$$

for henholdsvis positiv og negativ forskyvning av bøyen. Minste kvadraters metode er implementert i MATLAB-filen `lspoly.m` som beregner koeffisientene i  $f_S(u_b)$ .  $f_S(u_b)$  er gjengitt i figur 3.4



Figur 3.3: Beregninger basert på tester: Gjennopprettende krefter fra forankrings-system.



Figur 3.4: Gjennopprettende kraft,  $f_S(u_b)$ , fra forankringssystem tilnærmet som et 4. grads polynom.

Det viskøse draget fåes fra *Morisons ligning* og er gitt ved

$$f_D(\dot{u}_b) = \frac{1}{2} \rho_v C_D A \dot{u}_b^2. \quad (3.3)$$

Ligning (3.3) kalles også dragligningen.

Ligning (3.1) er ikke-lineær, og initialverdiproblemet (3.1) og (3.2) løses derfor numerisk i MATLAB ved hjelp av `ode45`-rutinen som er implementert i `bevlignloser.m`. Løsningen er gjengitt i figur 3.5 a) for initialverdiene

$$u_b(0) = 40 \text{ m}, \quad \dot{u}_b(0) = 0.$$

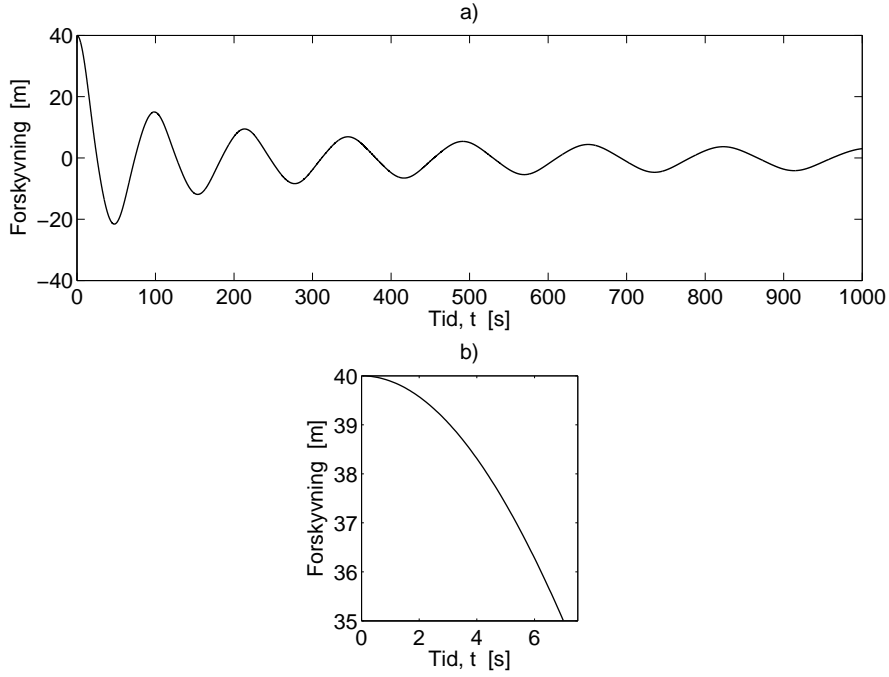
Som følge av testresultatene er vi kun interessert i bøybevegelsen de første fem metrene, og ved hjelp av MATLAB bestemmes denne bevegelsen som et nytt 4. ordens polynom,  $P_{u_b}(t) = p_1 t^4 + p_2 t^3 + p_3 t^2 + p_4 t + p_5$ . Koeffisientene  $p_1 - p_5$  avhenger av initialbetingelsene. Funksjonen  $P_{u_b}(t)$  er gjengitt i figur 3.5 b).

Over en periode,  $T_0$ , kan bøyens bevegelse nå skrives som:

$$u_b(t) = \begin{cases} P_{u_b}(t) & , 0 \leq t \leq t_d \quad \text{Fase 1} \\ \text{drivhastighet} \cdot t + l & , t_d \leq t \leq T_0 \quad \text{Fase 2} \end{cases}$$

der  $t_d$  er tiden det tar å trekke bøyen fem meter tilbake, og  $l$  er posisjonen hvor bøyen treffer isen.





Figur 3.5: **a)** Fri svingning av kontrollbøyen etter en initiell forskyvning,  $u_b = 40$  meter, **b)** Bøyebevegelsen de fem første metrene beskrevet av  $P_{ub}(t)$ .

$u_b(t)$  er en periodisk funksjon med periode  $T_0$ , og den kan dermed splittes opp i sine harmoniske komponenter ved hjelp av en *Fourierrekke* [7]:

$$u_b(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega_0 t) \quad (3.4)$$

der

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.5)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_b(t) dt \quad (3.6)$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u_b(t) \cos(j\omega_0 t) dt, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u_b(t) \sin(j\omega_0 t) dt, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

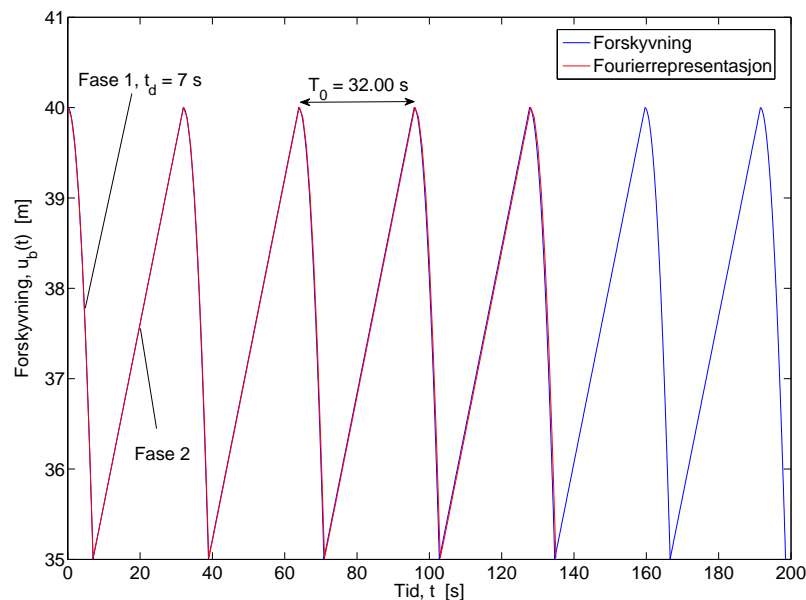
Koeffisientene  $a_0$ ,  $a_j$  og  $b_j$  evalueres i Maple, som kan integrere uttrykkene symbolsk. Løsningene fra Maple settes inn i MATLAB som nå kan brukes

### 3. LØSNING AV PROBLEM

til å bestemme  $a_0$ ,  $a_j$  og  $b_j$  for tilstrekkelig mange  $j$ , slik at løsningen blir tilstrekkelig nøyaktig. Bøyebevegelsen,  $u_b(t)$ , er nå kjent som en sum av cosinus- og sinusfunksjoner som kan benyttes i videre analyse av stigerørets bevegelse. Ettersom alt hittil har blitt gjort symbolsk er det mulig å forandre på alle parametrene (masse, isens drivhastighet, isens sprekkklengde etc.) i MATLAB. Figur 3.6 viser bøyebevegelsen for følgende inputparametre:

Tabell 3.1: Verdier brukt i beregningen av kontrollbøyebevegelsen.

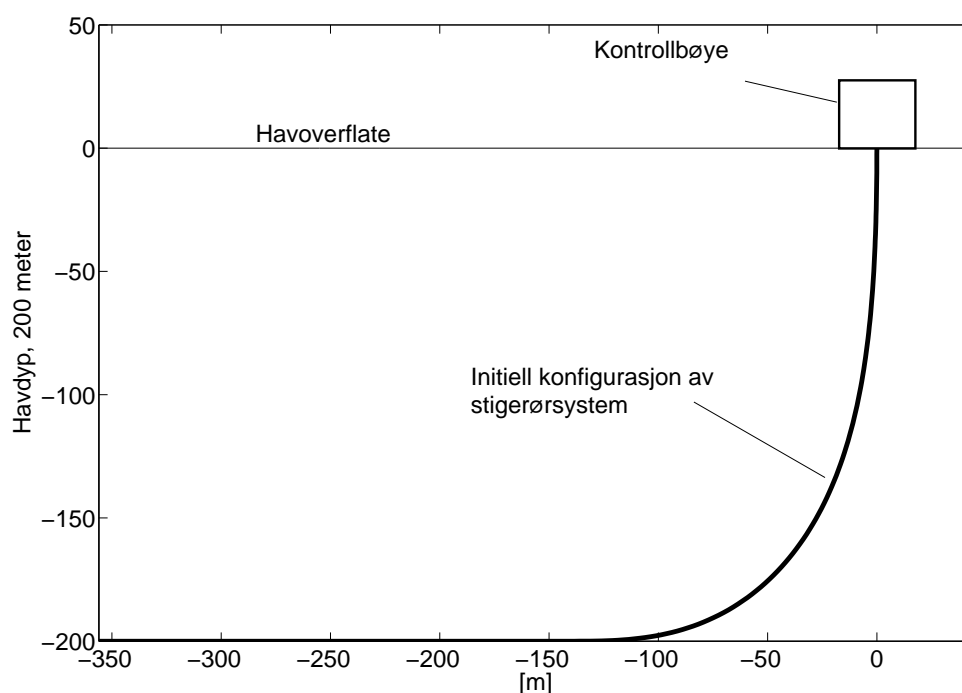
Kontrollbøyen			
Masse	$m_b$	$7.900 \cdot 10^{+6}$	kg
Addert masse	$m_{ba}$	$7.900 \cdot 10^{+6}$	kg
Masse under skjørtekant	$m_{bv}$	$4.169 \cdot 10^{+6}$	kg
Tetthet saltvann	$\rho_v$	$1.028 \cdot 10^{+3}$	kg/m <sup>3</sup>
Viskøs dempningskoeffisient	$C_D$	1.000	
Projisert frontareal	$A$	$6.763 \cdot 10^{+2}$	m <sup>2</sup>
Drivhastighet		$2.000 \cdot 10^{-1}$	m/s
Sprekkklengde		$5.000 \cdot 10^{+0}$	m
Initiell forskyvning	$u_{b0}$	$4.000 \cdot 10^{+1}$	m
Initiell hastighet	$\dot{u}_{b0}$	0.000	m/s
Antall ledd i Fourierrekken	$j$	200	



Figur 3.6: Bevegelse av kontrollbøyen som følge av kontakt med isflak.

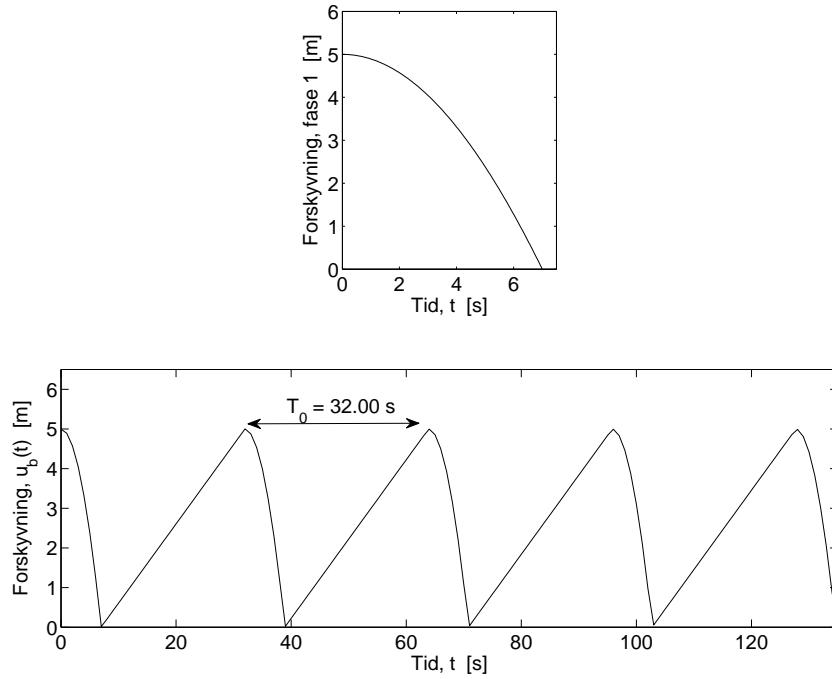
## 3.2 Dynamisk respons av stigerør – analytisk løsning

Stigerørsystemet har en initiell konfigurasjon som vist i figur 3.7. Vi forventer at kreftene på stigerøret vil være størst i den øvre delen, og da spesielt ved innspenningen til kontrollbøyen. Under antagelsen om at den dynamiske responsen i den øvre delen av stigerøret påvirkes lite av randbetingelsene på havbunnen skal vi i den analytiske delen modellere stigerøret som et rør som er fast innspent i toppen og fritt opplagt i bunnen. Dette gjør det mulig å anvende kjente metoder i analysen av stigerørbevegelsen. Videre skal vi anta at den *initielle* bevegelsen til kontrollbøyen, frem til isen sprekker for første gang, ikke skaper noen dynamiske effekter i stigerøret. Vi kan dermed benytte kontrollbøyebevegelsen slik den er presentert i figur 3.6. Som en følge av de



Figur 3.7: Initiell konfigurasjon av stigerørsystem.

modelleringsmessige forandringene vi nå har gjort er vi imidlertid nødt til å flytte intervallet for kontrollbøyens bevegelse for å unngå komplikasjoner i form av unaturlig høye spenninger, se figur 3.8. Systemet som vi nå har modellert vil gi en tilnærming til den *dynamiske* bevegelsen til stigerørsystemet. Forskyvningene og kreftene på grunn av den *statiske* konfigurasjonen vil ikke inkluderes her.



Figur 3.8: **a)** Fase 1 av kontrollbøyens bevegelse flyttet til intervallet  $[0, 5]$  meter, **b)** Kontrollbøyens bevegelse flyttet til intervallet  $[0, 5]$  meter.

#### 3.2.1 Dynamisk likevektsligning

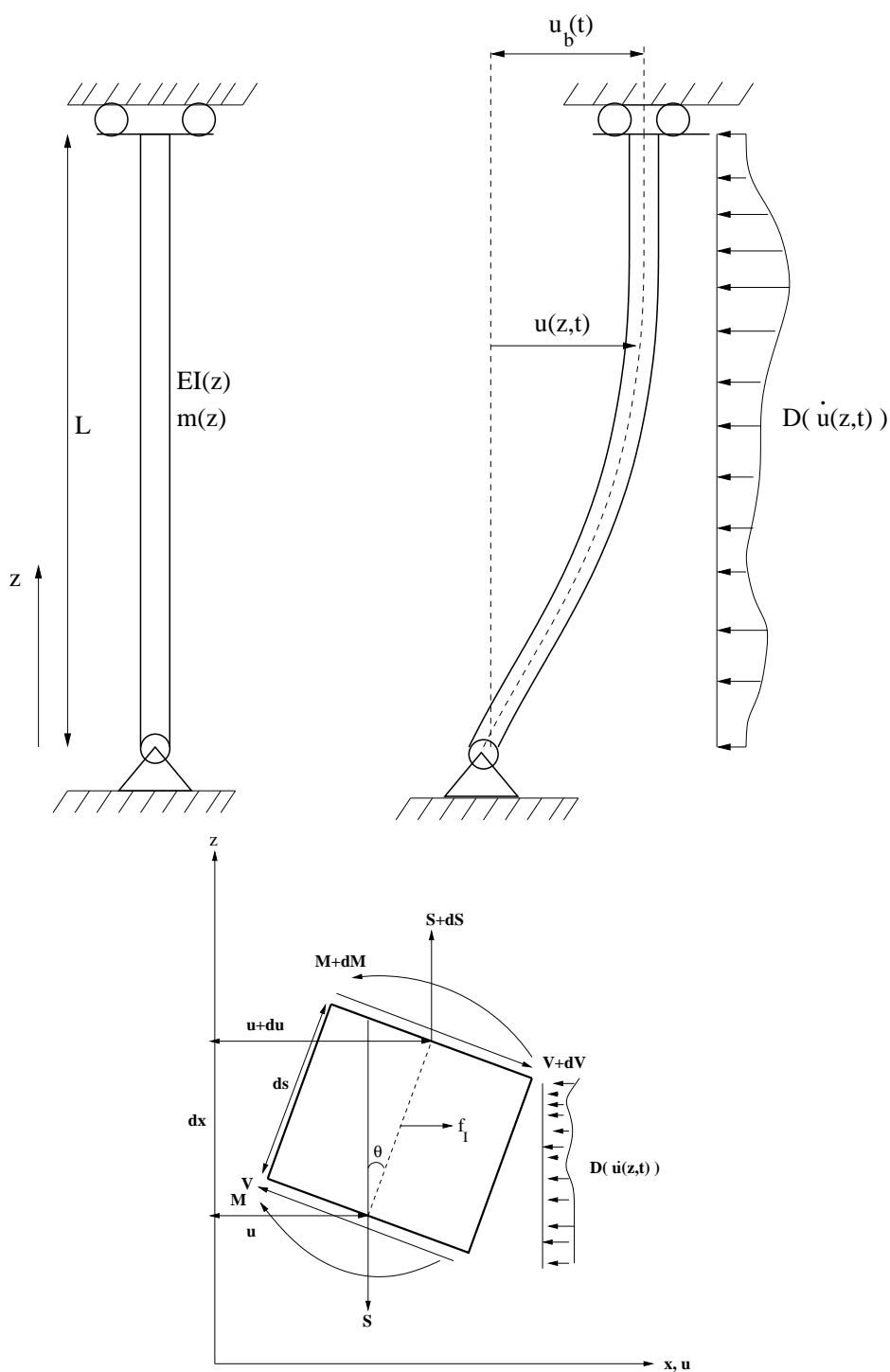
Vi skal nå utlede ligninger som beskriver bevegelsen til stigerøret modellert som fast innspennt i toppen og fritt opplagt i bunnen. Figur 3.9 illustrerer problemet.

Vi antar at stigerøret har bøyestivhet  $EI(z)$  og masse per lengdeenhet  $m_r(z)$ . Sammen med stigerørets masse vil det også akselereres en mengde av vannet som omgir røret. Vi betegner denne tilleggsmassen, også kalt adderte massen,  $m_{ra}(z)$ . Den totale akselererte massen per lengdeenhet betegnes  $m(z)$ . Når stigerøret beveger seg gjennom vannet vil det utsettes for krefter i form av et viskøst drag,  $D(\dot{u}(z, t))$ , som vi på samme måte som i delkapittel 3.1 finner fra *Morisons ligning*. Det tas også med en aksialkraft,  $S(z)$ , gjennom stigerøret på grunn av egenvekten. Denne strekkraften vil gjøre røret stivere.

Dersom vi ser på likevekt av et infinitesimalt element av stigerøret i deformert tilstand, se figur 3.9, og følger samme utledning som i delkapittel 2.2, kommer vi frem til følgende ligning:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - S(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - S'(z) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 C_D + m(z) \ddot{u} = 0, \quad (3.9)$$

som beskriver den horisontale bevegelsen til stigerøret. Randbetingelsene for dette



Figur 3.9: **Øverst:** Stigerøret modellert som fast innspennt i toppen og fritt opplagt i bunnen. Toppen er fri til å bevege seg i horisontalretningen. **Nederst:** Infinitesimalt element av stigerøret i deformert tilstand.  $f_I = -m(z)\ddot{u}dz$

problemet vil være:

- (i)  $u(0, t) = 0$  Null forskyvning ved bunnen
- (ii)  $u''(0, t) = 0$  Momentet ved bunnen er null
- (iii)  $u(L, t) = u_b(t)$  Forskyvningen i toppen er lik forskyvningen til kontrollbøyen
- (iv)  $u'(L, t) = 0$  Null rotasjon i innspenningen til bøyen

#### Forenklinger og tilpasninger av dynamisk likevektsligning

Den dynamiske likevektsligningen (3.9) er en 4. ordens, ikke-lineær, partiell differensialligning som beskriver den horisontale forskyvningen,  $u(z, t)$ , til stigerøret. I det videre antar vi konstant bøyestivhet,  $EI$ , konstant akselerert masse per lengdeenhet,  $m$ , og en konstant strekkraft,  $S$ , gjennom røret. Dragledet neglisjeres slik at ligningen blir lineær, og vi kan nå skrive:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.10)$$

#### 3.2.2 Løsning av dynamisk likevektsligning

Løsningen av den dynamiske likevektsligningen (3.10) er entydig bestemt av randbetingelsene (i) – (iv) gitt ovenfor. Randbetingelse (iii) sier at stigerørets forskyvning i toppen er lik forskyvningen til kontrollbøyen. Denne randbetingelsen er tidsavhengig, og det er denne som induserer bevegelsen i stigerøret. En vanlig fremgangsmåte ved løsning av slike problemer er å dele løsningen,  $u(z, t)$ , inn i en kvasistatisk og en dynamisk del [12, 13]. Den kvasistatiske delen gir forskyvningen til stigerøret ved ethvert tidspunkt dersom kontrollbøyen flytter seg tilstrekkelig sakte. Den tar ikke hensyn til rørets dynamiske egenskaper i form av treghet og dempning. Vi skriver dette som:

$$u(z, t) = u_{ks}(z, t) + u_d(z, t) \quad (3.11)$$

Den kvasistatiske forskyvningen til stigerøret,  $u_{ks}(z, t)$ , kan vi finne ved å løse den statiske differensialligningen, der treghetsleddet (og eventuelle dempningsledd) neglisjeres, og benytte randbetingelsene gitt ovenfor. Betingelse (iii) er som nevnt tidsavhengig slik at den kvasistatiske forskyvningen blir en funksjon av både rom og tid. Vi skriver den statiske ligningen som:

$$\frac{\partial^4 u_{ks}}{\partial z^4} - \beta^2 \frac{\partial^2 u_{ks}}{\partial z^2} = 0, \quad \beta^2 = \frac{S}{EI}. \quad (3.12)$$

Den generelle løsningen til (3.12) er:

$$u_{ks}(z) = A \cosh(\beta z) + B \sinh(\beta z) + Cz + D,$$

hvor koeffisientene  $A, B, C, D$  bestemmes fra randbetingelsene. Vi får:

$$\begin{aligned} (i) \quad u_{ks}(0) &= 0 & \Rightarrow D &= -A \\ (ii) \quad u''_{ks}(0) &= 0 & \Rightarrow A &= 0 \\ (iii) \quad u_{ks}(L) &= u_b(t) & \Rightarrow B \sinh(\beta L) + CL &= u_b(t) \\ (iv) \quad u'_{ks}(L) &= 0 & \Rightarrow C &= -B\beta \cosh(\beta L) = 0 \end{aligned}$$

Fra de to siste ligningene får vi nå den kvasistatiske løsningen:

$$u_{ks} = u_b(t) \frac{\sinh(\beta z) - z\beta \cosh(\beta L)}{\sinh(\beta L) - L\beta \cosh(\beta L)} \quad (3.13)$$

Vi setter nå (3.13) inn i det fullstendige uttrykket for forskyvningen, ligning (3.11), som videre settes inn i den dynamiske likevektsligningen, (3.10). Alle ledd som inneholder den kvasistatiske forskyvningen er nå kjent, og settes på høyre side som en effektiv last:

$$EI \frac{\partial^4 u_d}{\partial z^4} - S \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 u_{ks}}{\partial t^2} = p_{eff}(z, t). \quad (3.14)$$

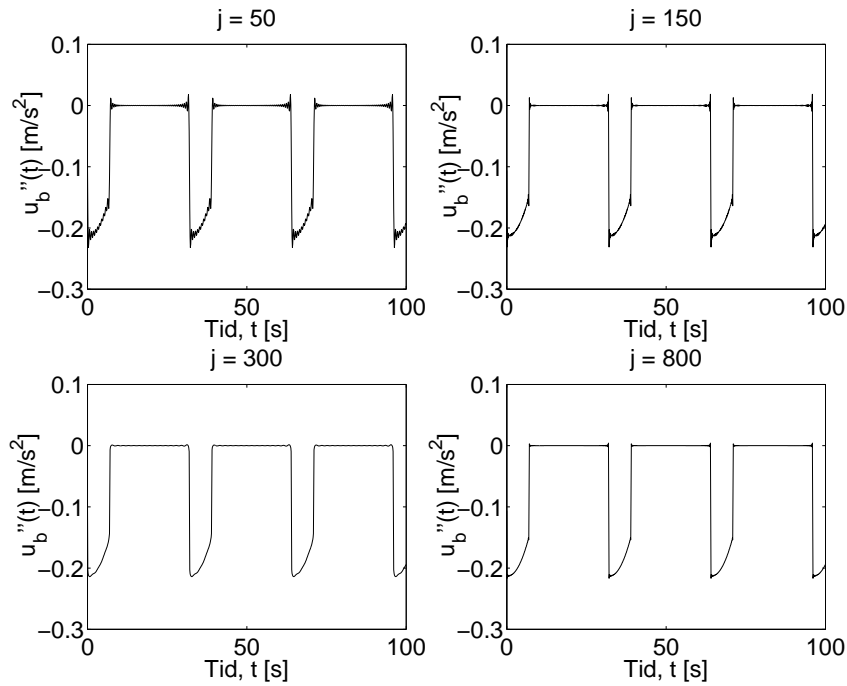
### Effektiv last

Den effektive lasten,  $p_{eff}(z, t)$ , uttrykker kontrollbøyens bevegelse fordelt som en last over hele stigerøret. Fra ligning (3.14) ser vi at  $p_{eff}(z, t)$  går som den akselererte massen per lengdeenhet,  $m$ , multiplisert med akselerasjonen til den kvasistatiske løsningen  $u_{ks}(z, t)$ . Den romlige delen av funksjonen beskriver lastens fordeling over stigerøret.

Akselerasjonen til den kvasistatiske løsningen er bestemt av kontrollbøyens akselerasjon,  $\ddot{u}_b(t)$ . Vi husker fra delkapittel 3.1 at kontrollbøyens bevegelse kunne deles i to faser, og gjør det samme med akselerasjonen:

$$\ddot{u}_b(t) = \begin{cases} \ddot{P}_{u_b}(t) & , 0 \leq t \leq t_d \quad \text{Fase 1} \\ 0 & , t_d \leq t \leq T_0 \quad \text{Fase 2} \end{cases} \quad (3.15)$$

På tilsvarende måte som i delkapittel 3.1 kan  $\ddot{u}_b(t)$  splittes opp i sine harmoniske komponenter ved hjelp av en *Fourierrekke*. Figur 3.10 viser Fourierrepresentasjonen av kontrollbøyens akselerasjon for ulike grader av nøyaktighet. Vi ser at akselerasjonen endrer seg svært raskt og det er derfor nødvendig med nokså mange ledd i Fourierrekken for å oppnå tilstrekkelig nøyaktighet. Fra figur 3.10 går det frem at den effektive lasten,  $p_{eff}(z, t)$ , kan tolkes som en impulslast som virker i fase 1 av bøyebegnelsen, og som er motsatt rettet.



Figur 3.10: Fourierrepresentasjon av kontrollbøyens akselerasjon for økende grad av nøyaktighet.

### 3.2.3 Fri svingning

Den homogene løsningen av (3.14) vil tilsvare fri svingning av stigerøret. Vi antar at  $u_d(z, t) = \phi(z)q(t)$ , som innsatt i (3.14) med høyre siden satt til null, gir:

$$\frac{EI}{m} \frac{\phi''''(z)}{\phi(z)} - \frac{S}{m} \frac{\phi''(z)}{\phi(z)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \omega^2, \quad (3.16)$$

der  $\omega$  er egenfrekvensen til stigerøret. Fra (3.16) får vi nå to ordinære differensialligninger:

$$\phi''''(z) - \beta^2 \phi''(z) - \alpha^4 \phi(z) = 0, \quad \beta^2 = \frac{S}{EI}, \quad \alpha^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (3.17)$$

og

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \quad (3.18)$$

Vi antar nå en løsning på formen  $\phi(z) = e^{rz}$  som innsatt i (3.17) gir:

$$(r^4 - \beta^2 r^2 - \alpha^4) e^{rz} = 0. \quad (3.19)$$

Ligning (3.19) er en bikvadratisk ligning som er lett å løse. Vi lar  $s = r^2$ , der  $s$  kan være et komplekst tall. Ligning (3.19) tar nå formen

$$s^2 - \beta^2 s - \alpha^4 = 0,$$



og løsning for  $s$  gir nå

$$s = \begin{cases} s_1 = \frac{\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 4\alpha^4}}{2} \\ s_2 = \frac{\beta^2 - \sqrt{\beta^4 + 4\alpha^4}}{2} \end{cases}$$

som totalt gir fire løsninger for  $r$ :

$$r = \begin{cases} r_1 = \sqrt{s_1} \\ r_2 = -\sqrt{s_1} \\ r_3 = \sqrt{s_2} \\ r_4 = -\sqrt{s_2} \end{cases}$$

$r_1$  og  $r_2$  er reelle størrelser, mens  $r_3 = i\sqrt{-s_2}$  og  $r_4 = -i\sqrt{-s_2}$  er komplekse. Dette gir oss løsningsbasisen

$$e^{\sqrt{s_1}z}, \quad e^{-\sqrt{s_1}z}, \quad e^{i\sqrt{-s_2}z}, \quad e^{-i\sqrt{-s_2}z},$$

som tilsvarer den reelle løsningsbasisen

$$\cosh \sqrt{s_1}z, \quad \sinh \sqrt{s_1}z, \quad \cos \sqrt{-s_2}z, \quad \sin \sqrt{-s_2}z.$$

Vi har altså funnet

$$\phi(z) = E \cosh \sqrt{s_1}z + F \sinh \sqrt{s_1}z + G \cos \sqrt{-s_2}z + H \sin \sqrt{-s_2}z, \quad (3.20)$$

som er den generelle løsningen av ligning (3.17). Randbetingelsene for den dynamiske delen av forskyvningen er alle geometriske og er gitt ved:

$$\begin{aligned} (v) \quad & \phi(0) = 0 \\ (vi) \quad & \phi''(0) = 0 \\ (vii) \quad & \phi(L) = 0 \\ (viii) \quad & \phi'(L) = 0 \end{aligned}$$

Den generelle løsningen, (3.20), innsatt i randbetingelsene (v) – (viii) leder til et homogent ligningssystem med fire ukjente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & s_2 & 0 \\ \cosh \sqrt{s_1}L & \sinh \sqrt{s_1}L & \cos \sqrt{-s_2}L & \sin \sqrt{-s_2}L \\ \sqrt{s_1} \sinh \sqrt{s_1}L & \sqrt{s_1} \cosh \sqrt{s_1}L & -\sqrt{-s_2} \sin \sqrt{-s_2}L & \sqrt{-s_2} \cos \sqrt{-s_2}L \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Ikke-triviell løsning er bare mulig dersom  $\det(A) = 0$ . Dette tilsvarer et egenverdiproblem der  $\alpha$  er ukjent. Løsning av egenverdiproblemet gir oss egenverdiene  $\alpha_n$  og dermed egenfrekvensene,  $\omega_n$ , knyttet til hver egenverdi. Med  $\omega_n$  kjent, så kjenner vi nå også  $s_{1n}$  og  $s_{2n}$ , og tre av de fire koeffisientene  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  og  $H_n$  kan bestemmes for hver  $\phi_n(z)$ . I tråd med tanken om “fri svingning” uttrykker  $\phi_n(z)$  svingemodene til den dynamiske delen av stigerørets forskyvning,  $u_d(z, t)$ .

MATLAB-filene `egenverdiloser.m` og `detlign.m` løser egenverdiproblemet. Filen `koeffisient.m` bestemmer koeffisientene  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  og  $H_n$  og normaliserer de slik at svingemodene  $\phi_n(z)$  blir ortonormale med hensyn på massen  $m$ .

### 3.2.4 Ortogonalitetsegenskaper

Ligning (3.17) gir egenfrekvens og egensvingemoden til mode  $r$ :

$$\left[ EI\phi_r''(z) \right]'' - \left[ S\phi_r(z) \right]'' = \omega_r^2 m\phi_r(z) \quad (3.22)$$

Vi multipliserer med  $\phi_n(z)$  og integrerer fra 0 til  $L$  slik at

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_n(z) EI\phi_r''''(z) dz - \int_0^L \phi_n(z) S\phi_r''(z) dz = \\ \int_0^L \phi_n(z) \omega_r^2 m\phi_r(z) dz \end{aligned} \quad (3.23)$$

De to leddene på venstre side integreres delvis to ganger. Vi får:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_n(z) EI\phi_r''''(z) dz = & \left\{ \phi_n(z) EI\phi_r'''(z) \right\}_0^L \\ & - \left\{ \phi_n'(z) EI\phi_r''(z) \right\}_0^L \\ & + \int_0^L \phi_n''(z) EI\phi_r''(z) dz \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} - \int_0^L \phi_n(z) S\phi_r''(z) dz = & - \left\{ \phi_n(z) S\phi_r'(z) \right\}_0^L \\ & + \left\{ \phi_n'(z) S\phi_r(z) \right\}_0^L \\ & - \int_0^L \phi_n''(z) S\phi_r(z) dz. \end{aligned}$$

Fra randbetingelsene ser vi at uttrykkene i klammer vil være null. Ligning (3.23) forenkles nå til:

$$\int_0^L \phi_n''(z) EI \phi_r''(z) dz - \int_0^L \phi_n''(z) S \phi_r(z) dz = \omega_r^2 \int_0^L \phi_n(z) m \phi_r(z) dz. \quad (3.24)$$

Hvis vi nå skriver (3.22) for mode  $n$ , multipliserer med  $\phi_r$  og integrerer fra 0 til  $L$  får vi:

$$\int_0^L \phi_r''(z) EI \phi_n''(z) dz - \int_0^L \phi_r''(z) S \phi_n(z) dz = \omega_n^2 \int_0^L \phi_r(z) m \phi_n(z) dz. \quad (3.25)$$

Ligning (3.24) trukket fra (3.25) gir:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \int_0^L \phi_n(z) m \phi_r(z) dz = 0. \quad (3.26)$$

Så hvis  $\omega_n \neq \omega_r$  vil

$$\int_0^L \phi_n(z) m \phi_r(z) dz = 0, \quad \text{for } r \neq n \quad (3.27)$$

som innsatt i (3.23) gir

$$\int_0^L \phi_n(z) EI \phi_r''''(z) dz - \int_0^L \phi_n(z) S \phi_r''(z) dz = 0, \quad \text{for } r \neq n. \quad (3.28)$$

Ligning (3.27) og (3.28) uttrykker ortogonalitetssegenskapene til svingemodene.

### 3.2.5 Dynamisk respons som følge av kontrollbøyens bevegelse

Når egenfrekvensene,  $\omega_n$ , og egensvingemodene,  $\phi_n(z)$ , er kjent kan vi nå løse den inhomogene ligningen (3.14) for den dynamiske responsen til stigerøret:

$$EI \frac{\partial^4 u_d}{\partial z^4} - S \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = p_{eff}(z, t) \quad (3.29)$$

Det dynamiske bidraget til forskyvningen,  $u_d(z, t)$ , kan nå uttrykkes som en lineærkombinasjon av svingemodene,  $\phi_n(z)$ :

$$u_d(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z) q_n(t). \quad (3.30)$$

Vi setter (3.30) inn i (3.29):

$$\sum_{n=1}^{\infty} EI \phi_n''''(z) q_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} S \phi_n''(z) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} m \phi_n(z) \ddot{q}_n(t) = p_{eff}(z, t),$$

og multipliserer med  $\phi_r(z)$  og integrerer over lengden slik at:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^L \phi_r(z) EI \phi_n''''(z) dz - \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^L \phi_r(z) S \phi_n''(z) dz \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \int_0^L m \phi_r(z) \phi_n(z) dz = \int_0^L p_{eff}(z, t) \phi_r(z) dz. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Fra ortogonalitetsegenskapene til svingemodene har vi at alle leddene på venstre side av ligning (3.31) forsvinner bortsett fra når  $r = n$ . Dette gir:

$$\begin{aligned} & q_n(t) \int_0^L \phi_n(z) EI \phi_n''''(z) dz - q_n(t) \int_0^L \phi_n(z) S \phi_n''(z) dz \\ & + \ddot{q}_n(t) \int_0^L m (\phi_n(z))^2 dz = \int_0^L p_{eff}(z, t) \phi_n(z) dz, \end{aligned} \quad (3.32)$$

som vi skriver

$$M_n \ddot{q}_n(t) + (K_n - K_{Gn}) q_n(t) = P_n(t). \quad (3.33)$$

$M_n$  er den generaliserte massen til systemet,  $K_n$  den generaliserte stivheten og  $K_{Gn}$  den generaliserte geometriske stivheten som uttrykker strekkraftens innvirkning og dermed representerer en korreksjon av stivheten. Sammen med initialbetingelsene

$$\begin{aligned} (v) \quad & u_d(z, 0) = 0 \\ (vi) \quad & \dot{u}_d(z, 0) = 0 \end{aligned}$$

har vi nå uendelig mange ligninger som kan løses for hver sin mode. MATLAB rutinen `ode45` brukes til å bestemme de modale koordinatene  $q_n(t)$  og er implementert i MATLAB filene `rorforskyving.m`, `phi1.m`, `ku1.m` og `kuloser.m`.

### 3.2.6 Normalisering av svingemoder

Det er vanlig å normalisere svingemodene enten slik at det største utslaget er lik en enhetslengde, eller slik at svingemodene er ortonormale med hensyn på den totale massen per lengdeenhet,  $m$ . RIFLEX benytter den siste metoden og dette gjøres også i den analytiske løsningen slik at  $M_n$ , gitt ved ligning (3.32) og (3.33), er lik 1:

$$M_n = \int_0^L m (\phi_n(z))^2 dz = 1. \quad (3.34)$$

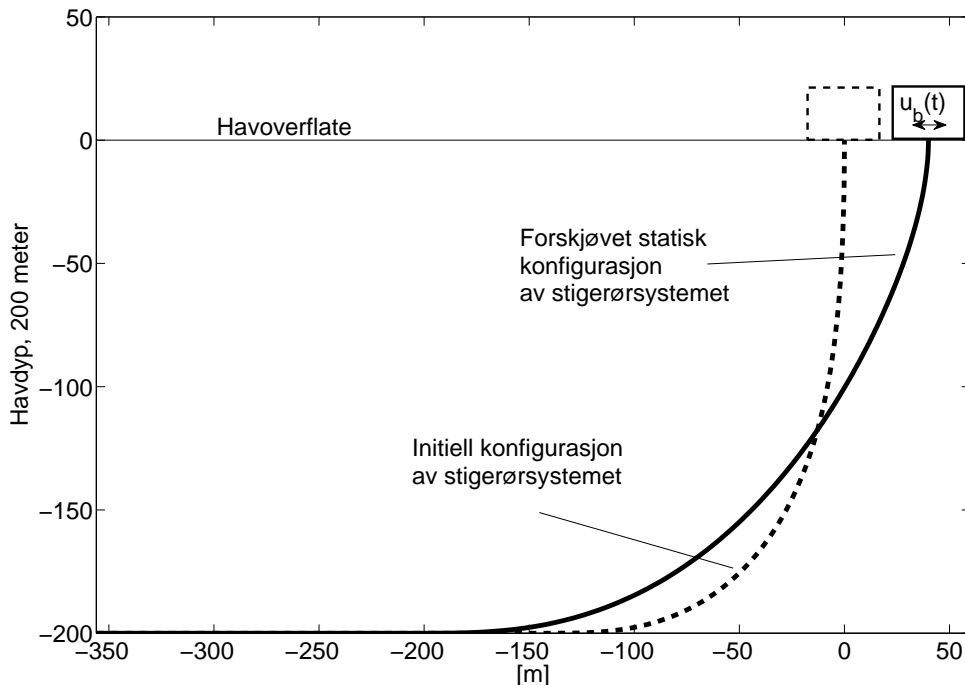
Vi bruker (3.34) til å definere en skaleringsfaktor  $C_n$  som sikrer at (3.34) gjelder for hver mode:

$$C_n = \sqrt{\frac{1}{m \int_0^L (\phi_n(z))^2 dz}}. \quad (3.35)$$

### 3.3 Dynamisk respons av stigerør – løsning ved hjelp av RIFLEX

For å undersøke om RIFLEX og den analytiske modellen gir sammenlignbare resultater lager vi et tilsvarende system i RIFLEX. Denne forenklete RIFLEX-modellen modelleres som et rør med fast innspenning i begge ender. Vi benytter den samme bevegelsen av kontrollbøyen som i delkapittel 3.2 (jamfør figur 3.8).

Vi ønsker videre å sammenligne den analytiske modellen med det virkelige stigerørsystemet. Dette systemet modelleres som vist i figur 3.11. Kontrollbøyebevegelsen vist i figur 3.6 brukes nå som input.



Figur 3.11: Initiell og forskjøvet statisk konfigurasjon av stigerørsystemet.

#### 3.3.1 Modellering av stigerørsystemene

I modelleringen av topologien til det virkelige stigerørsystemet benytter vi oss av et av standardsystemene som RIFLEX er utrustet med. Selve stigerøret modelleres i begge modellene ved hjelp av bjelkelementer med aksesymmetrisk tverrsnitt og konstante materialegenskaper.

#### 3.3.2 Dynamisk analyse i RIFLEX

I delkapittel 2.3 så vi at en ikke-lineær analyse er anbefalt for blant annet tilstrekkelig fremstilling av momenter og dersom det er forventet en tidsavhengig variasjon i geometrisk stivhet. Dette virker dermed som et fornuftig valg for analyse av stigerørsystemets forskyvninger og samsvarende krefter. Vi benytter samtidig metoden for *konstant gjennomsnittsakselersasjon* (jamfør tabell 2.1) i forbindelse med den numeriske tidsintegrasjonen. Kontrollbøyens bevegelse gis som en tidsserie, og vi benytter resultatene fra delkapittel 3.1 der bøyebegnelsen er beskrevet som en Fourierrekke gitt ved ligning (3.4)-(3.8).

De hydrodynamiske effektene, viskøst drag og addert masse, inkluderes i den dynamiske analysen.

# Kapittel 4

## Resultater

I dette kapitlet presenteres og sammenlignes resultatene fra modellene introdusert i delkapittel 3.2 og 3.3. I hovedsak er vi interessert i følgende:

- Stigerørets forskyvinger
- De indre kreftene i stigerøret som følge av den dynamiske responsen
- De statiske kreftene i det initielle og forskjøvede virkelige stigerørsystemet

For å utføre de ulike beregningene og analysene skissert i delkapittel 3.2 og 3.3 er følgende parametere for stigerøret benyttet:

Tabell 4.1: Verdier for stigerøret brukt i beregningene.

Materiale: stål	Tetthet	$\rho_s$	$7.850 \cdot 10^{+3}$	kg/m <sup>3</sup>
	Youngs modul	$E$	$2.000 \cdot 10^{+2}$	GPa
Dimensjoner	Ytre radius	$r_1$	$2.030 \cdot 10^{-1}$	m
	Indre radius	$r_2$	$1.870 \cdot 10^{-1}$	m
	Tverrsnittsareal	$A$	$1.960 \cdot 10^{-2}$	m <sup>2</sup>
	Lengde*	$L$	$5.000 \cdot 10^{+2}$	m
	Tverrsnittets andre arealmoment	$I$	$3.733 \cdot 10^{-4}$	m <sup>4</sup>
Masse	Masse per lengdeenhet	$m_r$	$1.539 \cdot 10^{+2}$	kg
	Addert masse per lengdeenhet	$m_{ra}$	$1.327 \cdot 10^{+2}$	kg
	Total masse per lengdeenhet	$m$	$2.866 \cdot 10^{+2}$	kg
Stivhet	Bøystivhet	$EI$	$7.466 \cdot 10^{+7}$	Nm <sup>2</sup>
	Aksialstivhet	$EA$	$3.920 \cdot 10^{+9}$	N
Moder	Analytisk		9	

\* Dette er lengden til stigerøret i den virkelige konfigurasjonen. Lengden som brukes i de to forenklede modellene vil omtales senere.

Den analytiske modellen gir en tilnærming til den *dynamiske* responsen i stigerøret. Modellene fra RIFLEX gir derimot den *totale* forskyvningen og tilhørende krefter. Her er det imidlertid mulig å skille de dynamiske resultatene fra de statiske. Det er de dynamiske resultatene vi skal bruke i sammenligningen videre.

Vi skal først sammenligne de to forenklede modellene, og senere sammenligne den analytiske modellen med den virkelige modellen fra RIFLEX og undersøke hvordan den analytiske modellen kan tilpasses det virkelige systemet i best mulig grad.

### 4.1 Sammenligning av forenklede modeller

Før vi sammenligner den analytiske modellen med den virkelige modellen vil vi undersøke om RIFLEX og den analytiske løsningsmetoden gir sammenlignbare resultater. Vi har derfor modellert en forenklet RIFLEX-modell som er identisk med den analytiske modellen, både med tanke på geometri og materialeegenskaper. Begge modellene skal eksiteres av kontrollbøyebevegelsen gitt i figur 3.8.

Ettersom stigerøret modelleres “rett opp og ned” i den forenklede RIFLEX-modellen vil den midlere strekkraften som følge av egenvekten til røret være null. Vi lar derfor strekkraften,  $S$ , i den analytiske modellen gå mot null inntil videre. Vi setter lengden til stigerøret lik 200 meter i begge modellene.

En egenverdianalyse av de forenklede modellene gir oss egenfrekvensene. Vi får at den første egenfrekvensen blir  $0.197 \text{ s}^{-1}$  som tilsvarer en egenperiode  $T = 31.89 \text{ s}$ . Denne egenperioden er tilnærmet lik egenperioden til kontrollbøyebevegelsen,  $T_0 = 32.00 \text{ s}$ . Dette betyr at de forenklede modellene vil utsettes for *resonans*. For å unngå denne effekten i denne innledende sammenligningen endrer vi randbetingelsen ved bunnen av stigerøret: Ved å sette stigerøret til å være fast innspent ved bunnen gjør vi systemet stivere og øker dermed egenfrekvensene.

#### 4.1.1 Svingemoder og egenfrekvenser

De fire første egenfrekvensene til de to forenklede modellene er gjengitt i tabell 4.2, og tilhørende svingemoder i figur 4.1. Vi ser at både egenfrekvensene og svingemodene er tilnærmet identiske.

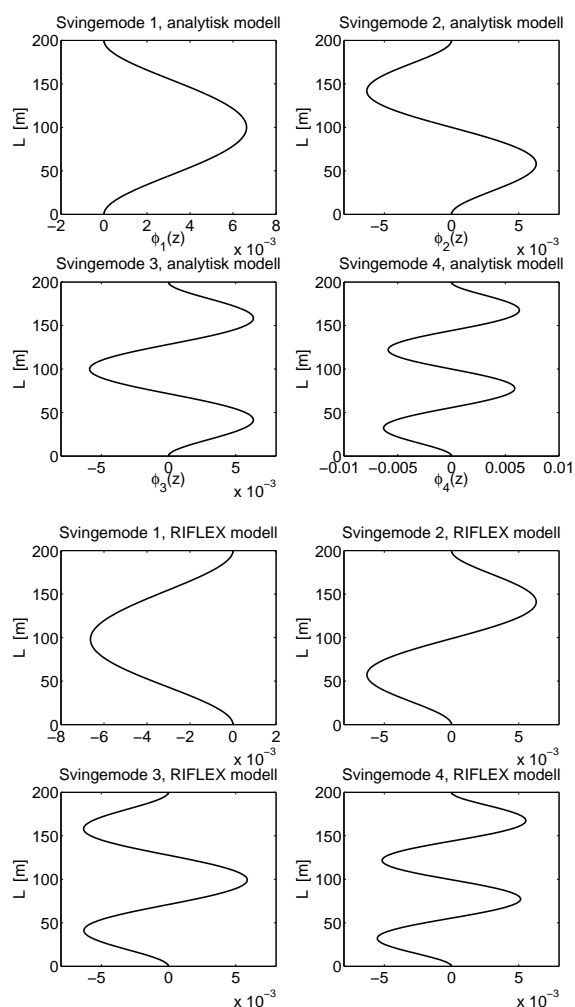
#### 4.1.2 Forskyvning

Dersom vi nå benytter kontrollbøyebevegelsen fra figur 3.8 i begge modellene får vi forskyvninger som vist i figur 4.2. Vi ser at forskyvningene til de to modellene er av samme størrelsesorden. Det går frem av figuren at RIFLEX-modellen svinger hurtigere. Dette skyldes at RIFLEX regner med flere moder enn hva vi gjør i den analytiske modellen.



Tabell 4.2: De fire første egenfrekvensene til de forenklede modellene.

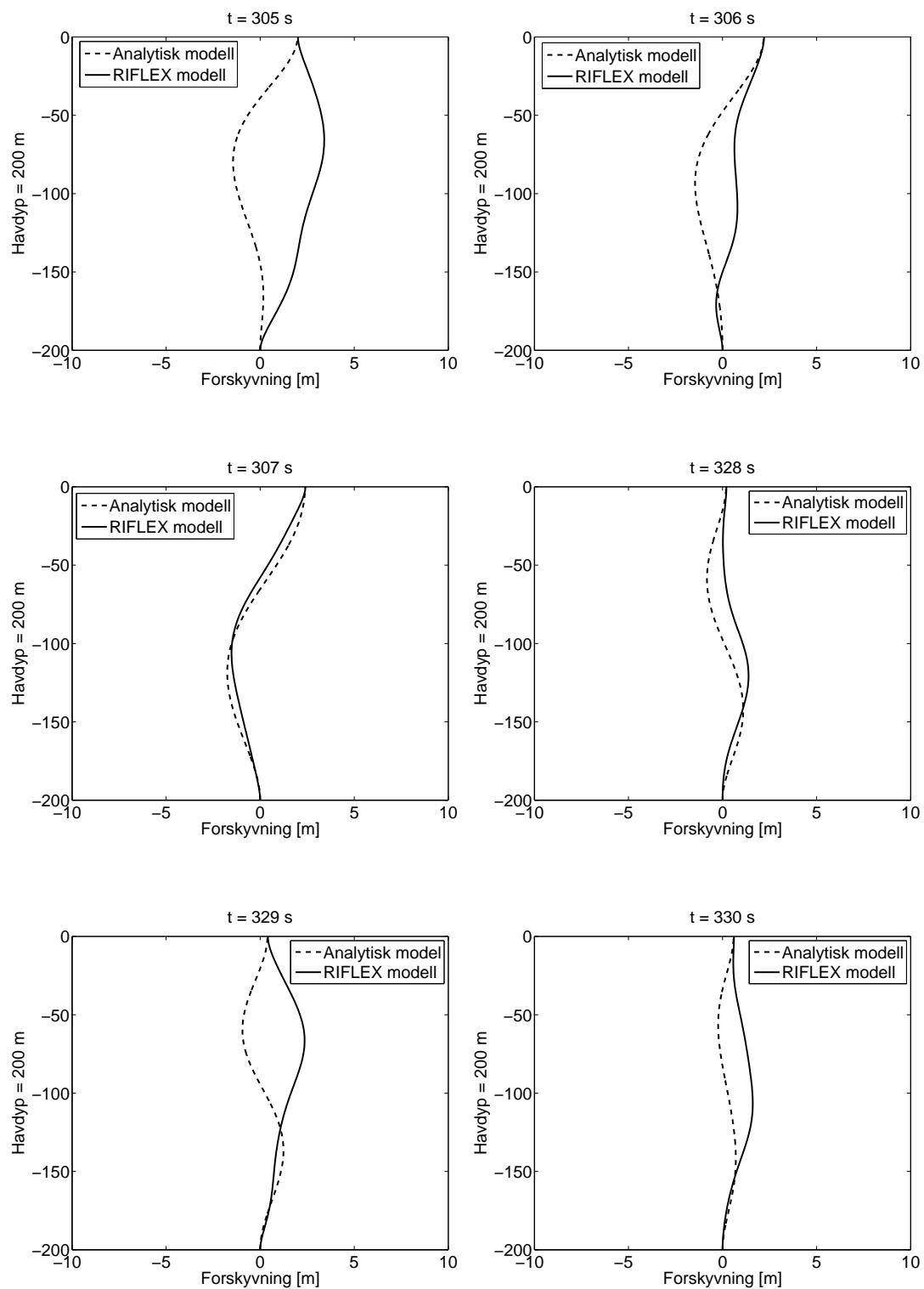
Sammenligning av egenfrekvenser for forenklede modeller		
	Analytisk [ $s^{-1}$ ]	RIFLEX [ $s^{-1}$ ]
$\omega_1$	0.285	0.285
$\omega_2$	0.787	0.786
$\omega_3$	1.542	1.542
$\omega_4$	2.549	2.548



Figur 4.1: **Øverst:** De fire første svingemodene til den forenklede analytiske modellen. **Nederst:** De fire første svingemodene til den forenklede RIFLEX modellen.

#### 4. RESULTATER

---



Figur 4.2: Sammenligning av forskyvninger for forenklete modeller.

## 4.2 Modifisering av analytisk modell

Før vi sammenligner den analytiske modellen med modellen av det virkelige stigerørsystemet er det viktig å gjøre en modifisering slik at de to systemene er mest mulig like.

Eigenfrekvensene til systemene gir en karakteristikk av systemenes naturlige dynamiske oppførsel. Dersom vi kan tilpasse den analytiske modellens egenfrekvenser slik at de blir likest mulig den virkelige modellens egenfrekvenser, er det rimelig å anta at de to systemene vil oppføre seg nokså likt hvis de blir utsatt for den samme lasten. I delkapittel 3.2 så vi at egenfrekvensene styres av fem parametre: Stigerørets masse,  $m_r$ , den adderte massen som akselereres sammen med stigerøret,  $m_{ra}$ , stigerørets bøyestivhet,  $EI$ , lengden,  $L$ , og den geometriske stivheten som følge av stigerørets egenvekt. I den analytiske modellen er den geometriske stivheten tilnærmet gjennom en konstant strekkraft  $S$ .

I den analytiske modellen har vi satt lengden av stigerøret til å være 200 meter. I den virkelige modellen ser vi fra figur 3.11 at den delen av røret som vil utsettes for forskyvninger har en lengde på rundt 360 meter. Dette innebærer at den totale massen som akselereres er omtrent 1.8 ganger større i modellen av det virkelige stigerørsystemet. For å kompensere for dette skalerer vi derfor massen i den analytiske modellen med denne faktoren. Dersom vi nå setter strekkraften,  $S$ , lik  $1.598 \cdot 10^5$  N (tilsvarende egenvekten til 59 meter av stigerøret med skalert masse) får vi egenfrekvenser som vist i tabell 4.3. Vi ser fra tabellen at egenfrekvensene til den analytiske modellen øker hurtigere enn egenfrekvensene til den virkelige modellen. Dette skyldes at den analytiske modellen er geometrisk stivere. Vi forventer at det er de første svingemodene som vil dominere den dynamiske responsen og har derfor valgt å tilpasse den første egenfrekvensen best mulig.

Tabell 4.3: Det modifiserte analytiske systemets og det virkelige systemets fire første egenfrekvenser.

Eigenfrekvenser for analytisk og virkelig modell		
	Analytisk modell [ $s^{-1}$ ]	Virkelig modell [ $s^{-1}$ ]
$\omega_1$	0.327	0.327
$\omega_2$	0.745	0.569
$\omega_3$	1.307	0.963
$\omega_4$	2.036	1.370

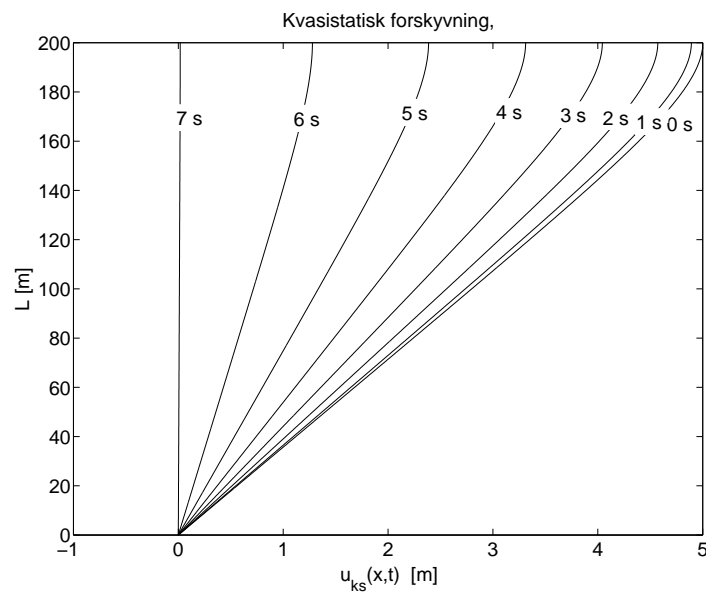
## 4.3 Sammenligning av analytisk og virkelig modell

### 4.3.1 Forskyvninger

Den dynamiske responsen til stigerøret kan, som vi så i delkapittel 3.2, deles i to komponenter: En kvasistatisk del som følge av kontrollbøyens forskyvning, og en dynamisk del som følge av kontrollbøyens akselerasjon. I RIFLEX er det ikke mulig å dele løsningen inn i disse to komponentene, men løsningsprosedyren fra delkapittel 3.2 håndterer dette fint.

#### Kvasistatisk forskyvning

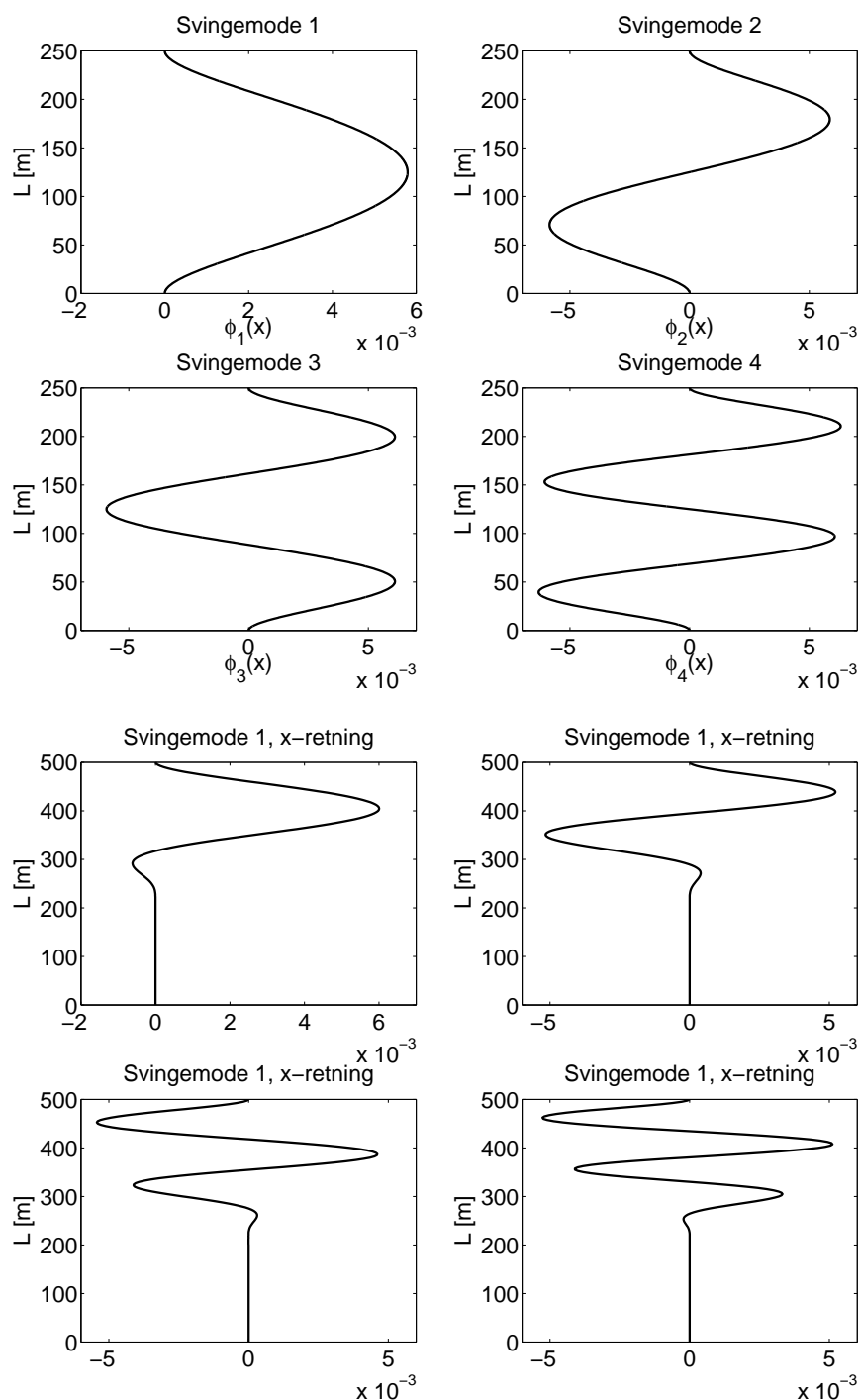
Figur 4.3 viser stigerørets kvasistatiske forskyvning, gitt ved ligning (3.13) for den analytiske modellen, i fase 1 av kontrollbøyebevegelsen. Verdiene fra tabell 4.1 er benyttet. Toppen av stigerøret følger bevegelsen til kontrollbøyen, og det kommer tydelig frem at hastigheten øker gjennom hele fase 1.



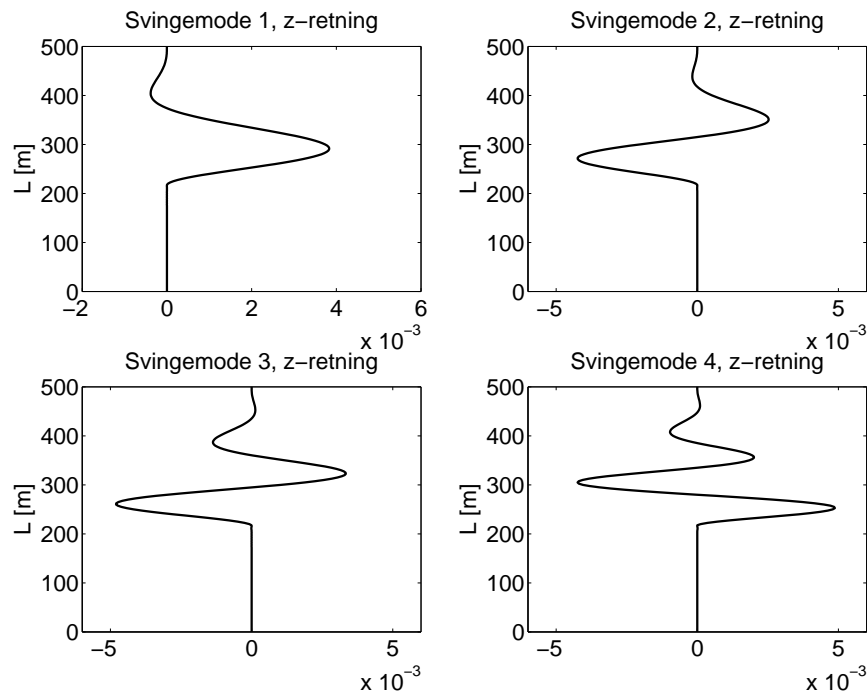
Figur 4.3: Kvasistatisk forskyvning av stigerøret

#### Svingemoder og egenfrekvenser

De fire første svingemodene fra den analytiske og virkelige modellen er gitt i figur 4.4 og 4.5. Den virkelige modellen vil ha forskyvninger i både  $x$ - og  $z$ -retning. Svingemodene for begge retningene er inkludert.



Figur 4.4: **Øverst:** De fire første svingemodene til den analytiske modellen. **Nederst:** De fire første svingemodene til den virkelige modellen,  $x$ -retning.



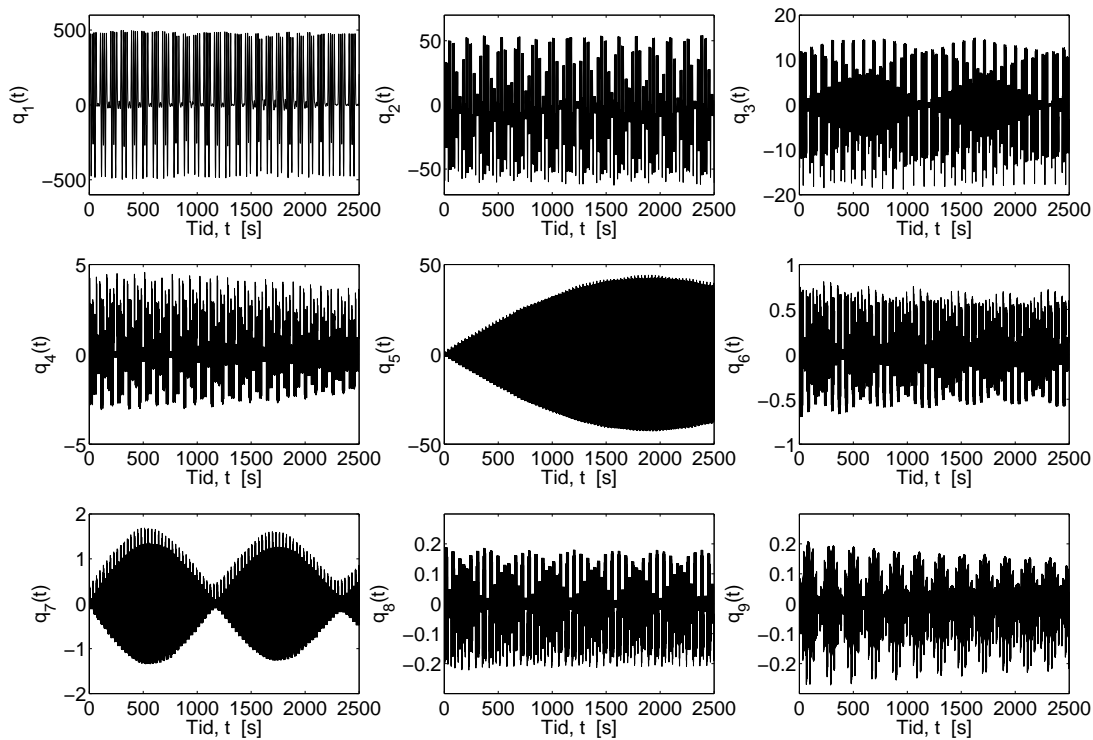
Figur 4.5: De fire første svingemodene til den virkelige modellen, z-retning.

### Modale koordinater

Fra ligning (3.33) får vi den modale koordinaten,  $q_n(t)$  til bevegelsen. Denne kan sammenlignes med responsen til et én-frihetsgradssystem. Multiplisert med svingemode  $\phi_n(z)$  utgjør den bidraget fra den  $n$ -te svingemoden til den dynamiske responsen,  $u(z, t)$ , i den analytiske modellen. Figur 4.6 viser de ni første modale koordinatene. Dersom vi sammenligner amplitudene til de modale koordinatene går det tydelig frem at det er den første svingemoden,  $\phi_1(z)$ , som vil dominere den dynamiske responsen i den analytiske modellen. Det er viktig å merke seg at den modale koordianten  $q_5(t)$  først når sin maksimale verdi etter omtrent 2000 sekunder. Denne maksimale amplituden utgjør omtrent ti prosent av den maksimale amplituden til den første svingemoden, og kan dermed ikke sies å være neglisjerbar. Dette betyr at vi i den dynamiske analysen bør se på forskyvninger og krefter som virker i et tidsrom på minst 2000 sekunder for å få med den fulle effekten fra svingemode fem.

### Total dynamisk respons

Stigerørets totale forskyvning er gitt ved ligning (3.11) for den analytiske modellen. Den totale dynamiske responsen til den virkelige modellen vil ha utslag



Figur 4.6: Modale koordinater for de ni første svingemodene.

i både  $x$ - og  $z$ - retning. Stigerøret i den virkelige modellen er samtidig mye lenger enn stigerøret i den analytiske modellen. På grunn av de geometriske forskjellene er det derfor vanskelig å sammenligne den totale dynamiske forskyvningen til de to modellene. Den dynamiske responsen gir imidlertid opphav til dynamiske krefter og spenninger i stigerøret. I det videre skal disse studeres.

### 4.3.2 Krefter og spenninger

Stigerørets dynamiske respons får røret til å bøye av i ulike former. Denne bøyningen fører til indre reaksjonskrefter i stigerøret i form av bøyemomenter og skjærkrefter som vil variere langs stigerørets lengde og i tiden. I praksis vil den dynamiske responsen også føre til en variasjon av strekkraften som følge av stigerørets egenvekt.

Det er de maksimale kreftene og spenningene i langs stigerørets lengde som er av interesse i denne oppgaven. Det er størrelsen på disse maksimalverdiene som i første omgang er avgjørende for om stigerøret tåler den induserte bevegelsen fra kontrollbøyen. I dette delkapittelet presenteres de maksimale krefter og spenningene slik de opptrer i diskrete punkter langs stigerørets lengde. Det er ingen

eksplisitt sammenheng mellom tidspunktene de inntreffer på.

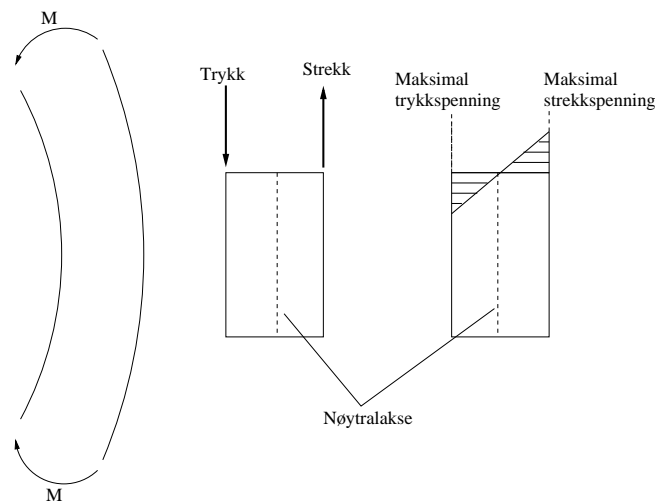
Vi antok tidligere at kreftene på grunn av stigerørets dynamiske bevegelse ville være størst i den øvre delen av stigerøret. I den analytiske modellen modellerte vi stigerøret som fast innspent i toppen og fritt opplagt i bunnen. Dette medfører at kreftene ved bunnen ikke gir en god tilnærming til virkeligheten. Vi skal derfor konsentrere oss om de øverste 150 metrene av stigerøret og kreftene som virker der.

### Bøyemomenter og bøyepenninger

Den dynamiske responsen,  $u(z, t)$ , i stigerøret medfører et bøyemoment,  $M(z, t)$ , gitt ved ligning (2.15). Bøyepenningerne er videre gitt ved

$$\sigma_b = \frac{M(z, t)y}{I}, \quad (4.1)$$

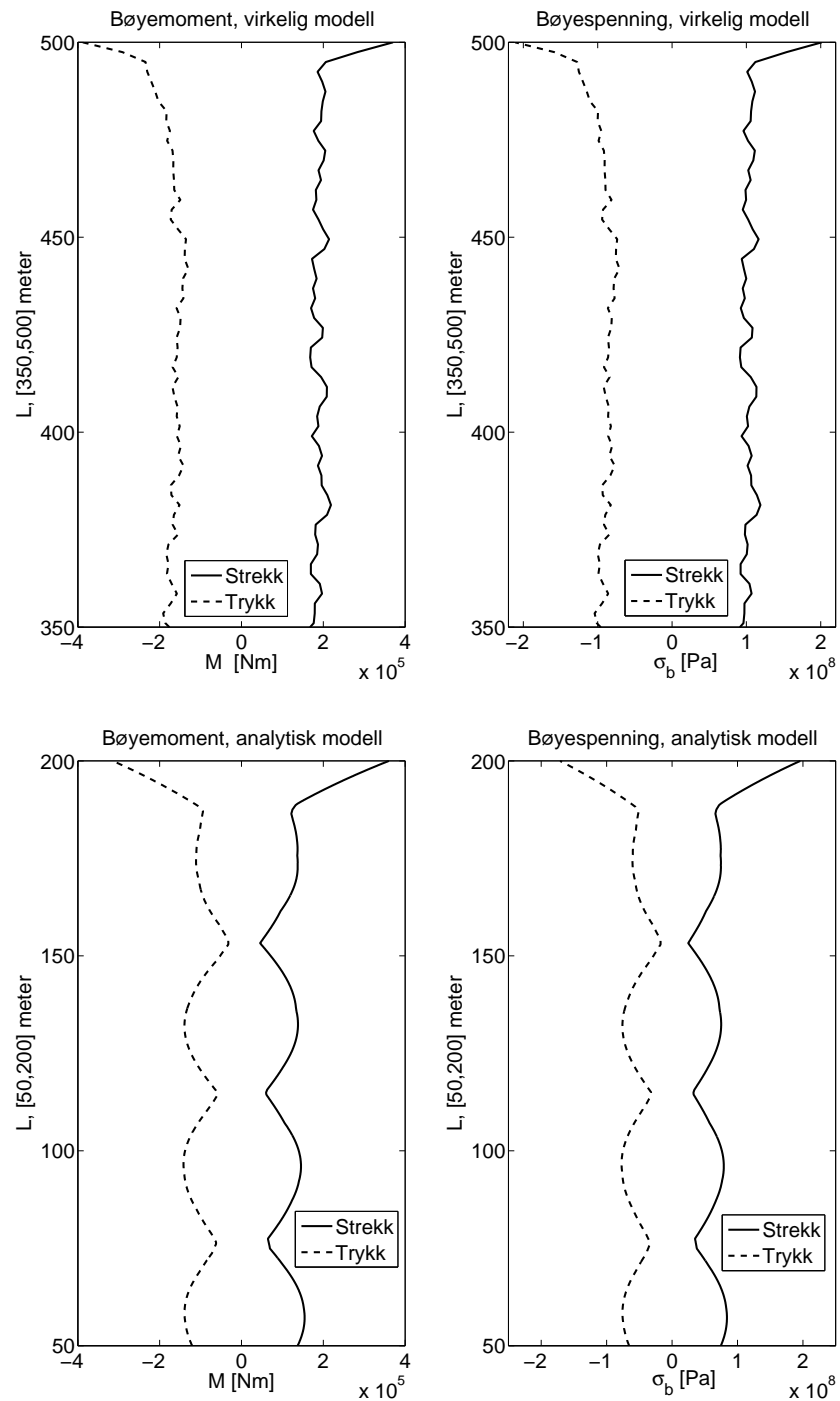
hvor  $y$  er avstanden fra nøytralaksen til det aktuelle punktet hvor spenningene skal måles. Vi ser at bøyepenningerne er lineært fordelt over stigerørets tverrsnitt. De største strekk- eller trykkspenningene, som følge av bøyning, opptrer derfor ved stigerørets yttervegg. Figur 4.7 illustrerer dette.



Figur 4.7: Fordeling av aksialspenning som følge av bøyemoment.

Figur 4.8 viser de maksimale bøyemomentene og bøyepenningerne slik de opptrer langs stigerørets lengde. Utifra fortegnskonvensjonen for momentene, definert i figur 2.15 for RIFLEX og figur 3.9 for den analytiske modellen, går det frem at de positive og negative verdiene angir henholdsvis strekk og trykk på stigerørets høyre side. Motsatte verdier gjelder på stigerørets venstre side. Vi ser at de maksimale bøyepenningerne i den analytiske modellen er rimelig godt tilnærmet de maksimale spenningene i den virkelige modellen. Vi legger merke til at tilnærmingen er spesielt god for den øverste delen av stigerøret hvor bøyepenningerne er størst.





Figur 4.8: Maksimalt bøyemoment og maksimal bøyespenning slik den er opptrer i diskrete punkter langs de øverste 150 metrene av stigerørets yttervegg. **Øverst:** Virkelig modell. **Nederst:** Analytisk modell

**Skjærkrefter og skjærspenninger**

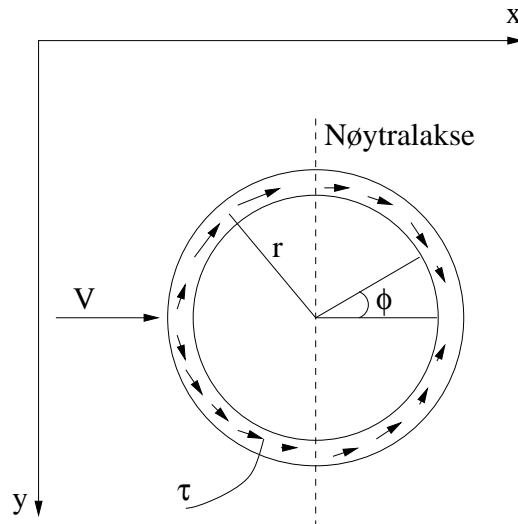
Skjærkraftfordelingen,  $V(z, t)$ , i stigerøret er gitt ved ligning (2.16). Stigerøret har et sirkulært tverrsnitt med tynne vegger og fordelingen av skjærspenninger,  $\tau$ , over tverrsnittet er dermed gitt ved ligning (4.2) (se også figur 4.9):

$$\tau = \frac{V(z, t)}{\pi r t} |\sin \phi|, \quad (4.2)$$

hvor  $t$  er tykkelsen til stigerørsveggen, og  $r$  er radiusen. Vi ser at skjærspenningene vil være størst på nøytralaksen hvor de er gitt ved

$$\tau_{max} = \frac{2V}{A}, \quad (4.3)$$

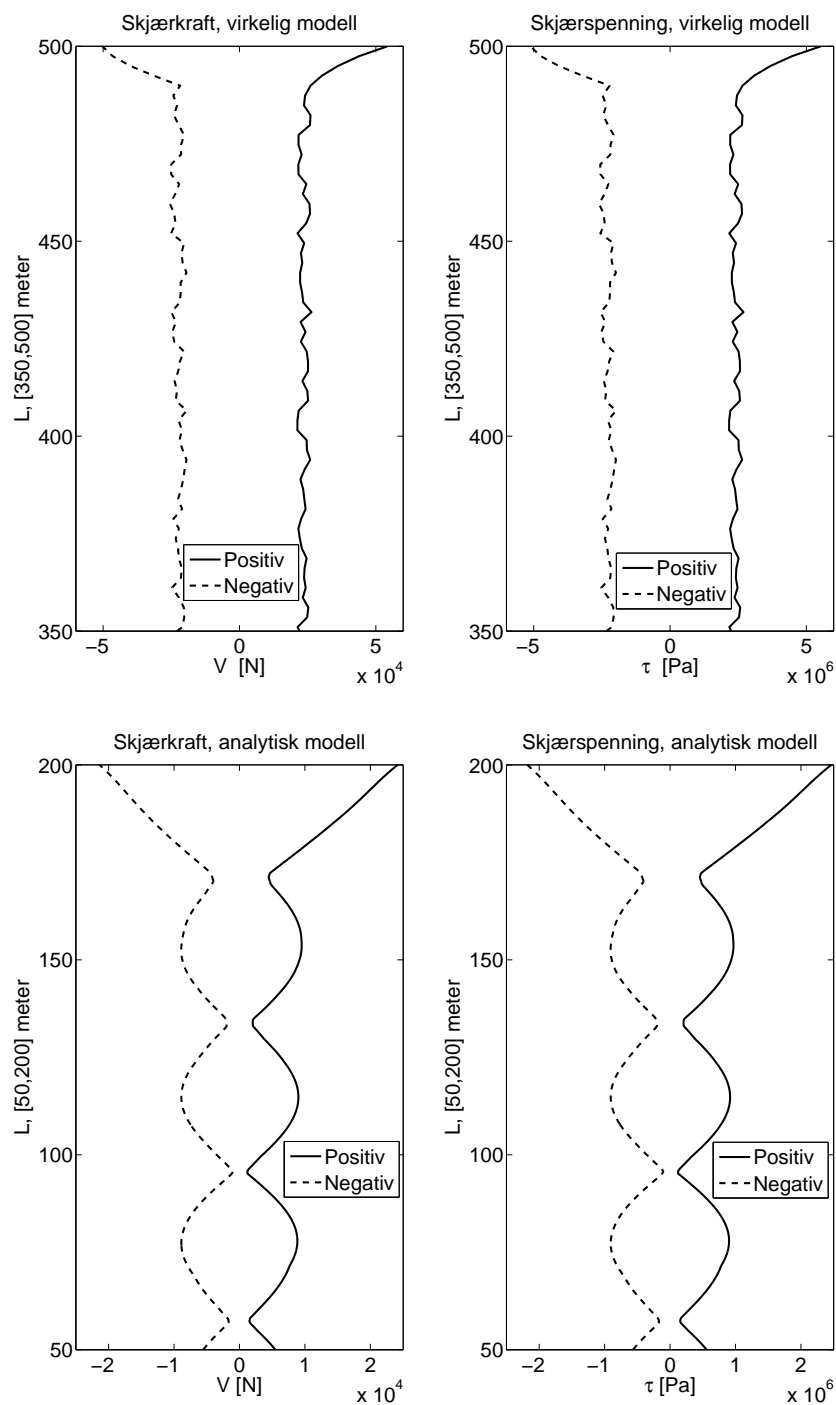
der  $A$  er tverrsnittsarealet.



Figur 4.9: Skjærspenning i tynnvegget sirkulært tverrsnitt.

Figur 4.10 viser de maksimale skjærkreftene og skjærspenningene slik de opptrer i diskrete punkter på nøytralaksen langs de øverste 150 metrene av stigerøret. Vi ser at fordelingen av de maksimale skjærspenningene følger samme trend både i den analytiske og virkelige modellen. Skjærspenningene i den virkelige modellen er imidlertid større i den analytiske modellen. Vi ser at de er omtrent dobbelt så store øverst i stigerøret, og at forskjellen øker lenger ned. En mulig årsak til denne forskjellen er at flere svingemoder er inkludert i løsningen fra RIFLEX.

### 4.3. Sammenligning av analytisk og virkelig modell



Figur 4.10: Maksimal skjærkraft og skjærspenning slik den opptrer i diskrete punkter på nøytralaksen langs de øverste 150 metrene av stigerøret. **Øverst:** Virkelig modell. **Nederst:** Analytisk modell

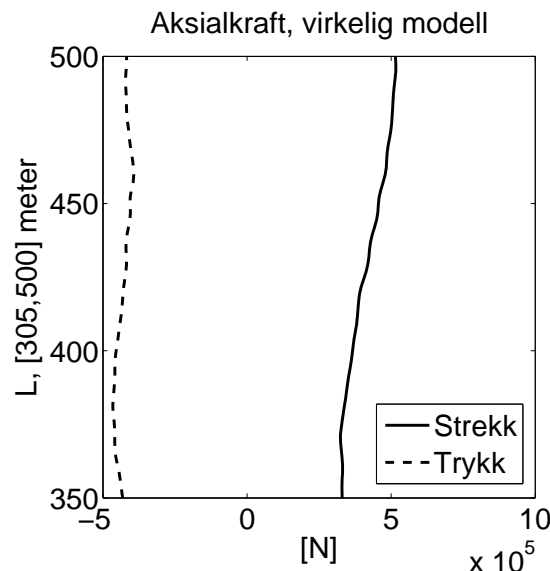
### Aksialkrefter og aksialspenninger

Vi så i delkapittel 3.2 at stigerørets egenvekt fører til en aksialkraft gjennom stigerøret. I den analytiske modellen er denne antatt å være en konstant strekkraft  $S$  som vi nå har satt til  $S = 1.598 \cdot 10^5$  N. I den virkelige modellen regner RIFLEX med en aksialkraft som varierer langs stigerørets lengde og i tiden. Figur 4.11 viser den maksimale aksialkraften i diskrete snitt, for den virkelige modellen, i den øverste delen av stigerøret. Vi ser fra figuren at aksialkraften varierer mellom trykk og strekk.

Aksialkraften gir opphav til aksialspenninger i stigerøret. Disse finner vi ved å dele aksialkraften på stigerørets tverrsnittsareal:

$$\sigma_a = \frac{S}{A}. \quad (4.4)$$

Vi ser at aksialkraften gir aksialspenninger,  $\sigma_a$ , som er konstante over stigerørets tverrsnitt. Kombinert med bøyespenningen,  $\sigma_b$ , får vi nå den totale aksialspenningen,  $\sigma_{tot}$ , i tverrsnittet. Den totale aksialspenningen er størst der hvor bøyespenningen,  $\sigma_b$ , er størst og virker i samme retning som  $\sigma_a$ . Ettersom vi er interessert i de største maksimale spenningene betyr dette at vi for den analytiske modellen må benytte bøyespenningene som virker på strekksiden av stigerøret. For den virkelige modellen må vi benytte bøyespenningen på strekksiden i de snittene hvor den maksimale aksialkraften virker i strekkretningen, og bøyespenningen på trykksiden i de snittene hvor den maksimale aksialkraften virker i trykkretningen.



Figur 4.11: Maksimale positive og negative aksialkrefter slik de fordeler seg i diskrete snitt langs de øverste 150 metrene av stigerøret.

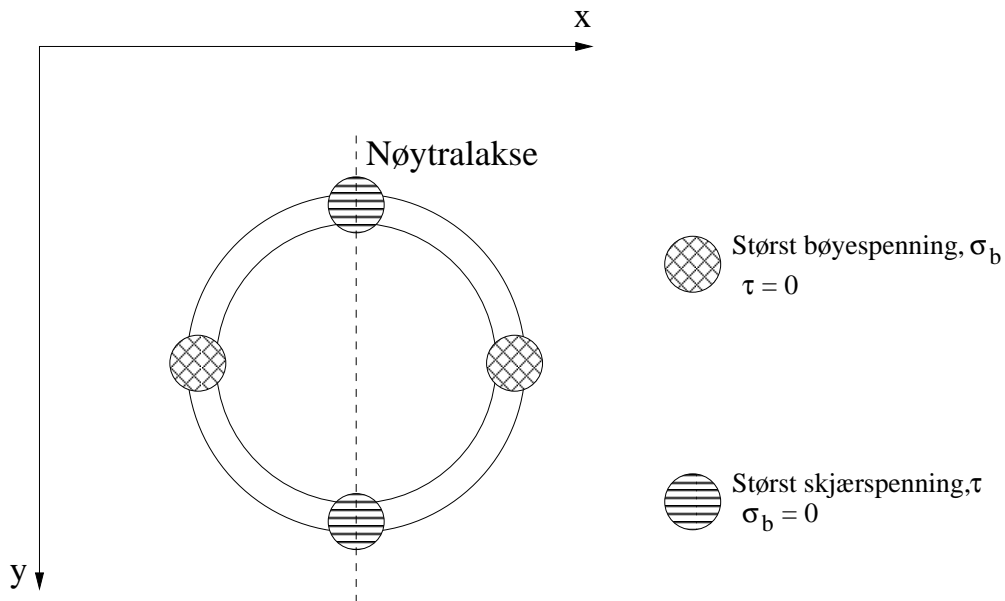
### Von Mises ekvivalente spenninger

Ovenfor så vi at spenningene i stigerøret er størst langs stigerørets yttervegger og at spenningstilstanden i et tverrsnitt er sammensatt av både aksial- og skjærspenninger som virker i ulike retninger. Vi vet at stigerøret vil oppføre seg lineært elastisk dersom det blir utsatt for aksialspenninger som er mindre enn flytspenningen  $\sigma_f$ . Von Mises kriterie relaterer den sammensatte spenningstilstanden i et punkt til en ekvivalent aksiell spenningstilstand,  $\sigma_e$ , som dermed kan sammenlignes med flytspenningen. I vårt todimensjonale tilfelle har vi [14]:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{atot}^2 + 3\tau_{zx}^2}. \quad (4.5)$$

Figur 4.12 viser hvor de største skjær- og bøyespenningene opptrer. Vi ser at der bøyespenningene er størst så er skjærspenningene null, og omvendt. Tabell 4.4 sammenligner de største maksimale spenningene og det går frem at  $\sigma_b \gg \sigma_a$  og  $\sigma_b \gg \tau$  for begge modellene. Dette betyr at vi i den videre spenningsanalysen skal konsentrere oss om de maksimale spenningene som virker der hvor bøyespenningene er størst. Uttrykket for den ekvivalente spenningen forenkles nå til:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{atot}^2} = \sigma_{atot}. \quad (4.6)$$



Figur 4.12: Punkter hvor de største skjær- og bøyespenningene opptrer i stigerørets tverrsnitt.

Figur 4.13 viser de ekvivalente spenningene for den analytiske og virkelige modellen. Vi ser at de ekvivalente spenningene,  $\sigma_e$  er svært like de maksimale

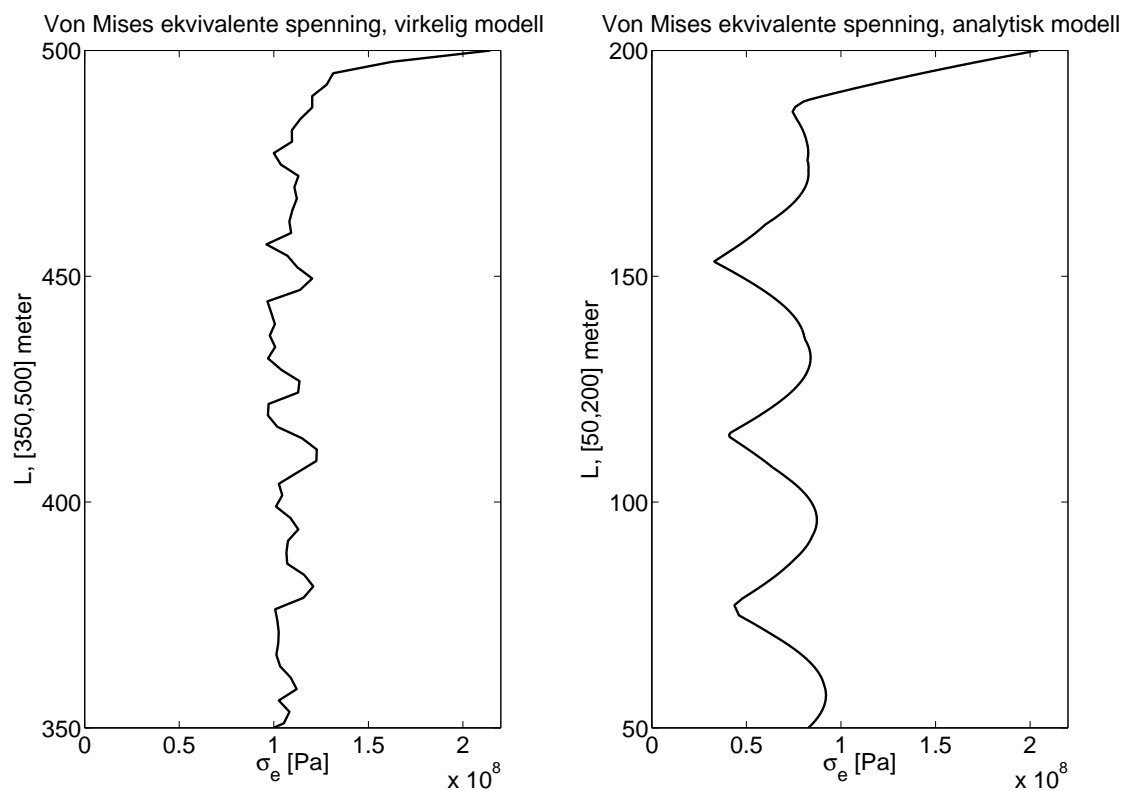
#### 4. RESULTATER

---

bøyespenningsene,  $\sigma_b$ , fra figur 4.8. Tillegget fra aksialspenningen,  $\sigma_a$ , er imidlertid merkbart. Spesielt for den virkelige modellen.

Tabell 4.4: De fire første egenfrekvensene til de forenklete modellene.

	Analytisk modell [Pa]	Virkelig modell [Pa]
$\sigma_b$	$1.96 \cdot 10^8$	$2.01 \cdot 10^8$
$\sigma_a$	$8.15 \cdot 10^6$	$5.53 \cdot 10^6$
$\tau$	$2.46 \cdot 10^6$	$2.63 \cdot 10^7$



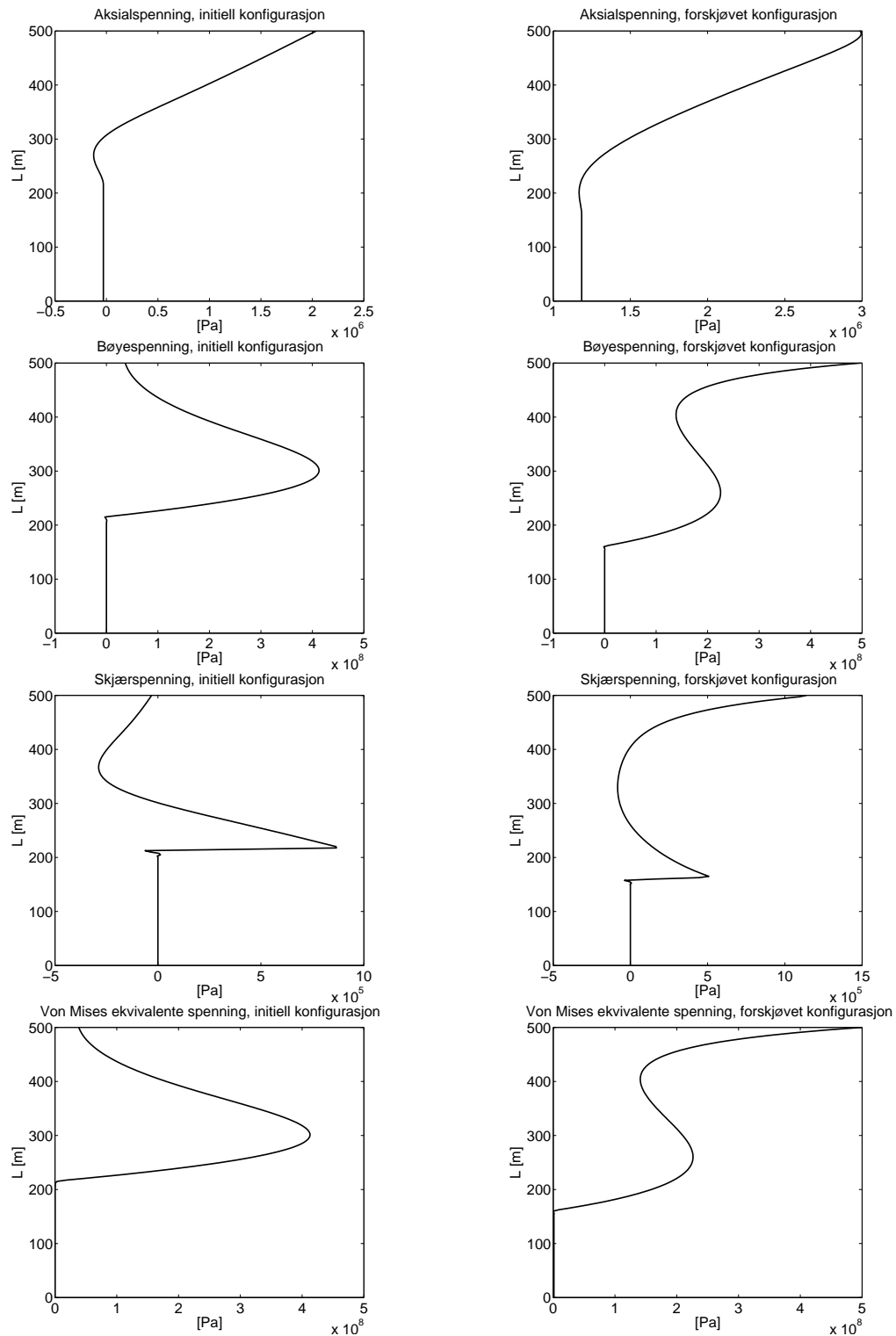
Figur 4.13: Von Mises ekvivalente spenninger. **Venstre:** Virkelig modell. **Høyre:** Analytisk modell

## 4.4 Statiske krefter og spenninger

Hittil har vi konsentrert oss om kreftene og spenningene forårsaket av den dynamiske responsen i stigerøret. For å få et helhetlig bilde av spenningstilstanden i stigerøret er det samtidig viktig å se på de statiske spenningene som er til stede. Figur 4.14 viser de maksimale statiske spenningene slik de er fordelt langs lengden til den initielle og forskjøvede stigerørkonfigurasjonen (jamfør figur 3.11). Den forskjøvede konfigurasjonen gjelder for en midlet posisjon av kontrollbøyebevegelsen, altså 37.5 meter. Bøyespenningene er regnet ut ved stigerørets yttervegg, og fra fortegnskonvensjonen i figur 2.15 angir disse strekk på stigerørets høyre side.

Vi ser at bøyespenningene er dominerende også i det statiske tilfellet. For den initielle konfigurasjonen er de maksimale spenningene størst i intervallet [200,400] meter av stigerørslengden, og for den forskjøvede konfigurasjonen er de størst ved innspenningen til kontrollbøyen. Dette henger sammen med at bøyemomentet,  $M$ , er omvendt proporsjonalt med krumningsradiusen,  $R$ .

## 4. RESULTATER



Figur 4.14: Maksimale statiske spenninger slik de opptrer langs stigerørets lengde. **Venstre:** Intitiell konfigurasjon. **Høyre:** Forskjøvet konfigurasjon.



# Kapittel 5

## Diskusjon av resultater og konklusjon

I kapittel 4 så vi at den analytiske løsningsmetoden, fra delkapittel 3.2, og RIFLEX gav svært like resultater ved bruk av samme modell. Videre så vi på hvordan vi kunne tilpasse den analytiske modellen slik at den ble mest mulig lik det virkelige stigerørsystemet, og vi så på resultatene fra analysene av den virkelige og analytiske modellen. Vi la spesiell vekt på de maksimale spenningene i stigerørsystemet, og vi presenterte de ekvivalente spenningene  $\sigma_e$ . I dette kapitlet skal vi sette de ekvivalente spenningene opp mot en gitt toleransespenning  $\sigma_t$ . Denne toleransespenningen er definert ved flytspenningen,  $\sigma_f$ , dividert på en sikkerhetsfaktor  $\epsilon$ :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_f}{\epsilon}. \quad (5.1)$$

Flytspenningen til stål settes til  $\sigma_f = 420.00 \cdot 10^6$  Pa, og vi skal bruke en sikkerhetsfaktor  $\epsilon = 1.15$  slik at

$$\sigma_t = 365.22 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \quad (5.2)$$

### 5.1 Dynamiske spenninger

Resultatene fra delkapittel 4.3 viser de maksimale spenningene slik de opptrer i diskrete punkter langs stigerørets lengde. Vi ser tydelig at spenningene er størst ved innspenningen til kontrollbøyen. Noe som stemmer med vår initielle antagelse. Vi ser også at det er bøyespenningene som dominerer spenningsbildet både i den virkelige og analytiske modellen.

Den analytiske modellen gav resultater som var nokså like resultatene fra den virkelige modellen. Overensstemmelsen var spesielt god ved innspenningen til kontrollbøyen.

Figur 4.13 viser de ekvivalente spenningene  $\sigma_e$  for den analytiske og virkelige modellen av stigerørsystemet. De største spenningene finner vi ved innspenningen til kontrollbøyen. Tabell 5.1 sammenligner disse verdiene med toleransespenningen,  $\sigma_t$  og vi ser at spenningene som følge av den dynamiske responsen i stigerøret er vel innenfor hva som kan tillates.

Tabell 5.1: Sammenligning av ekvivalente spenninger fra den dynamiske responsen og toleransespenning. Den ekvivalente spenningen er regnet ut ved innspenningen til kontrollbøyen.

	<b>Ekvivalent spenning</b>	<b>Prosent av toleransespenning</b>
Analytisk modell	$204.10 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	55.88%
Virkelig modell	$214.50 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	58.73%

## 5.2 Statiske spenninger

Figur 4.14 viser de maksimale statiske spenningene for den initielle og forskjøvede stigerørkonfigurasjonen. Tabell 5.2 sammenligner de største ekvivalente spenningene fra den statiske analysen med de ekvivalente spenningene fra den dynamiske analysen. Vi ser at verdiene fra de statiske konfigurasjonene er omtrent dobbelt så store som maksimalverdiene fra den dynamiske analysen. Dette betyr at det er de statiske spenningene som dominerer spenningsbildet og som er avgjørende for “stigerør – kontrollbøye” konseptet.

Tabell 5.2: Sammenligning av de største ekvivalente spenningene fra de statiske konfigurasjonene med den største ekvivalente spenningen fra den dynamiske analysen og toleransespenningen.

	<b>Ekvivalent spenning</b>	<b>Prosent av dynamisk spenning</b>	<b>Prosent av toleransespenning</b>
Initiell	$412.80 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	192.45%	111.50%
Forskjøvet	$499.30 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	232.77%	126.85%

Tabell 5.2 viser at de største statiske spenningene er henholdsvis 11.50% og 26.85% større enn toleransespenningen. Stigerøret vil med andre ord utsettes for

kritiske spenninger allerede før de dynamiske spenningene blir aktuelle. Dette betyr at før konseptet kan kvalifiseres så må de statiske spenningene reduseres.

## 5.3 Forslag til videre arbeid

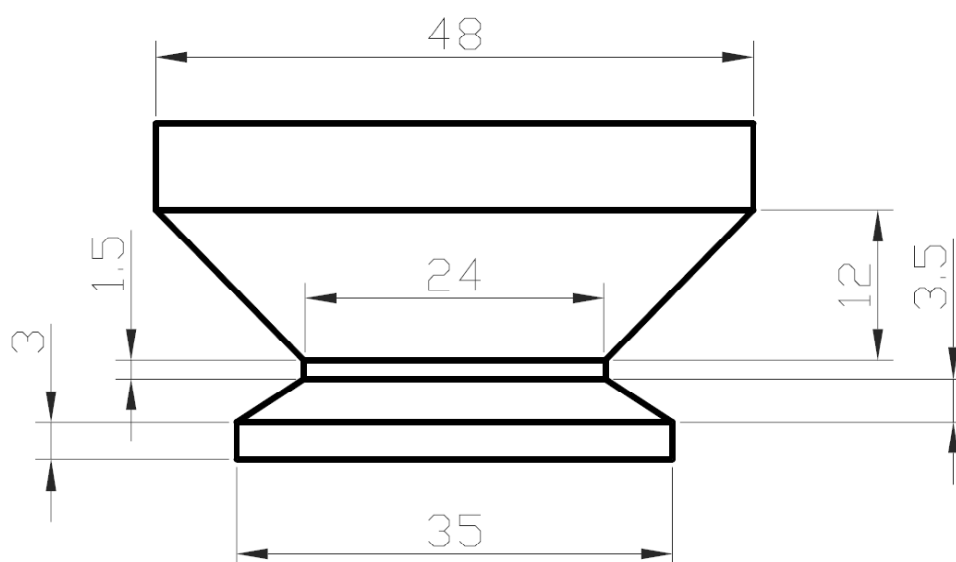
- De statiske spenningene kan reduseres ved å endre på dimensjonene til stigerøret. En mindre radius vil bidra til å gjøre bøyespenningene mindre. Et grundig arbeid med tanke på dimensjonering av stigerøret bør derfor gjennomføres.
- Den statiske bøyespenningen ved innspenningen til kontrollbøyen kan reduseres ved å forandre opplageret. Et opplager som gir mulighet for rotasjon kan være en mulighet.
- Selv om de dynamiske spenningene er mindre enn toleransespenningen,  $\sigma_t$ , så vil spenningene påføre stigerøret slitasje over tid. For å undersøke “levetiden” til stigerøret bør det derfor gjennomføres en utmattingsanalyse.



# Vedlegg

## A Kontrollbøyen

Dimensjoner på kontrollbøyen er gitt i figur A-1. FORCE Technology har i tillegg oppgitt en vekt på  $m_b = 7900$  kg.



Figur A-1: Dimensjoner for kontrollbøyen som studeres i oppgaven. Dimensjonene er oppgitt i meter.

### A.1 Masse av vann under kontrollbøyens skjørtekant

Den nederste delen av kontrollbøyen betegnes gjerne som en skjørtekant. Volumet under skjørtekanten vil fylles med vann, og denne vannmassen vil akselereres sammen med kontrollbøyen. I beregningen av kontrollbøyens bevegelse er det viktig å ta hensyn til denne massen,  $m_{bv}$ .

Volumet,  $V$ , som fylles med vann under skjørtekanten multiplisert med tettheten til vannet gir oss massen  $m_{bv}$ . Et vertikalt tverrsnitt av kontrollbøyens

skjørtekant ser vi nederst på figur A-1, og vi ser at vi kan finne volumet ved å betrakte to geometriske former: frustum kjegler og sylindere. Enkel regning gir nå:

$$V = 4.057 \cdot 10^3 \text{ m}^3, \quad (\text{A-1})$$

og

$$m_{bv} = V \rho_v = 4.169 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad (\text{A-2})$$

der tettheten til vann er satt til  $\rho_v = 1.028 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

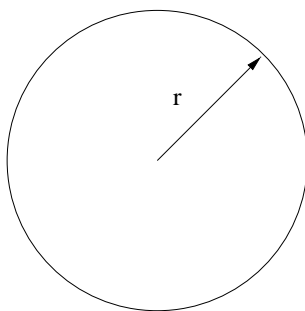
## B Definisjoner

### B.1 Addert masse

Et legeme som akselereres gjennom et fluid må samtidig flytte på en gitt mengde av fluidet som omgir det. Dette fører til et tillegg i systemets treghet som vi kaller addert masse. For enkelhets skyld tolkes den adderte massen som den mengden fluid som akselerers sammen med legemet.

I denne oppgaven benyttes to-dimensjonal stripeteori i beregningen av den adderte massen for henholdsvis kontrollbøyen og stigerøret. Vi ser på to-dimensjonale sirkler (figur B-1) hvor den adderte massen er lik den fortrenkte væskemengden:

$$m_{a11} = \pi \rho r^2.$$



Figur B-1: Addert masse for en to-dimensjonal sirkel.

#### Addert masse for kontrollbøyen

Den adderte massen til kontrollbøyen finner vi nå ved å beregne den fortrenkte væskemengden (figur B-2):

$$dm_{ba} = \rho_w \pi r(z)^2 dz \quad (\text{B-1})$$

$$\Downarrow \quad (\text{B-2})$$

$$m_{ba} = 7900 \text{ kg}, \quad (\text{B-3})$$

$$(\text{B-4})$$

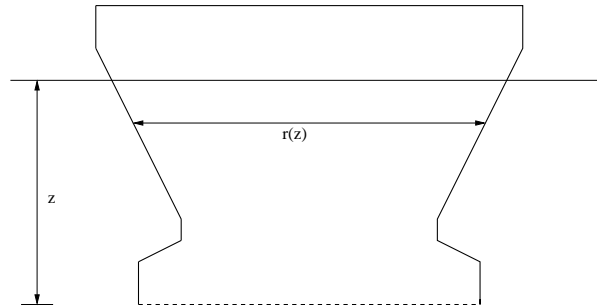
som tilsvarer bøyens masse [2].

#### Addert masse for stigerøret

Den adderte massen til stigerøret per lengdeenhet er gitt ved

$$m_{ra} = \rho_w \pi r^2 = 1.327 \cdot 10^2 \text{ kg}. \quad (\text{B-5})$$

Verdiene fra tabell 4.1 er benyttet



Figur B-2: Beregning av addert masse for kontrollbøyen.

## B.2 Viskøst drag

Det viskøse draget på et legeme som beveger seg gjennom et fluid tilnærmes gjerne ved

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_D A v^2.$$

Her er  $\rho$  fluidets tetthet,  $v$  den relative hastigheten mellom legemet og fluidet,  $A$  legemets projiserte, våte frontareal og  $C_D$  den viskøse dragkoeffisienten. Dragkoeffisienten er en dimensjonsløs størrelse og kan betraktes som et mål på det hydrodynamiske draget forårsaket av fluidets strømming rundt legemet. For brede og svært lite strømlinjeformede legemer er verdier på over 1 typisk, mens for mer strømlinjeformede legemer er det vanlig med verdier under 1[15].

Det er vanlig å beskrive dragkoeffisienten som en funksjon av *Reynoldstallet* til strømmingen, slik at den avhenger av både strømningshastigheten og legemets geometri. *Reynoldstallet* må være høyt nok til at det oppstår et turbulent kjølevann. Dersom hastigheten og geometrien er kjent kan dragkoeffisienten finnes fra en rekke tabeller og figurer.

### Viskøst drag på kontrollbøyen

Dragkoeffisienten til kontrollbøyen er satt til  $C_D = 1$  etter anbefaling fra FORCE Technology.

Konrollbøyens projiserte, våte frontareal finner vi ved å studere figur A-1. Vi ser at arealet er sammensatt av fire geometriske former, to rektangler og to trapeser, og finner dermed arealet til å bli:

$$A = 676.25 \text{ m}^2.$$

I denne oppgaven antas det at vannet har en temperatur på 5°C, som betyr at tettheten er gitt ved

$$\rho = 1.028 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$



**Viskøst drag på stigerøret**

I den analytiske modellen ser vi bort fra det viskøse draget. I RIFLEX er det derimot inkludert. Her benyttes en dragkoeffisient  $C_D = 0.70$ . Dette er en typisk verdi for slanke konstruksjoner slik som stigerør.

## C MATLAB-kode

### C.1 Bevegelse av kontrollbøyen

MATLAB-funksjonene `kontrollboye` og `bevligloser` bestemmer kontrollbøye-bevegelsen gitt ved initialverdiproblemet (3.1) og (3.2) ved hjelp av den innebygde MATLAB-rutinen `ode45`. Funksjonen `lspoly` bestemmer de gjennopprettende kreftene som et 4.grads polynom. Algoritmen benyttet i denne funksjonen er hentet fra boken *Numerical Methods Using MATLAB* [16].

```
function [] = kontrollboye(tspan,yo,m_tot,rho_v,CD,areal)

% INPUT:
% tspan - tidsrom for evaluering
% yo - initialverdier
% m_tot - total akselerert masse
% rho_v - tetthet saltvann
% CD - viskøs dempningskoeffisient
% Areal - projisert tverrsnittsareal

% Løser for fri svingning av kontrollbøyen ved hjelp av ode45
% rutinen
[t_boye,y] = ode45(@bevligloser,tspan,yo,[],m_tot,rho_v,CD,areal);
```

```
function ydot=bevligloser(t,y,m_tot,rho_v,CD,Areal)

% INPUT:
% t - tidsrom for evaluering
% y - initialverdier
% m_tot - total akselerert masse
% rho_v - tetthet saltvann
% CD - viskøs dempningskoeffisient
% Areal - projisert tverrsnittsareal

% OUTPUT:
% ydot - matrise som inneholder kontrollbøyens forskyvning og
% hastighet i hhv. første og andre kolonne

% Henter koeffisientene til 4. grads polynomet som beskriver de
% gjennopprettende kreftene.
[C1,C2] = lspoly;

if y(1)>0
    fs = (C1(1)*y(1)^4 + C1(2)*y(1)^3 + C1(3)*y(1)^2 + C1(2)*y(1)^1 + C1
        (4));
else
```

```

    fs = (C2(1)*y(1)^4 +C2(2)*y(1)^3 +C2(3)*y(1)^2 +C2(2)*y(1)^1 +C2
        (4));
end
ydot = [y(2); -(0.5*rho_v*CD*Areal*abs(y(2))*y(2))/m + fs/m_tot];

```

```

function [C1,C2] = lspoly(X1,Y1,M)

% INPUT
% X1 –      Vektor som inneholder verdiene langs x-aksen i figur 3.2
% Y1 –      Vektor som inneholder verdiene langs y-aksen i figur 3.2
% M –      Polynomgraden (satt til 4 i oppg.)

%OUTPUT
% C1 –      Koeffisientene til polynomet som beskriver de
%           gjennopprettende kreftene ved positiv forskyvning
% C2 –      Koeffisientene til polynomet som beskriver de
%           gjennopprettende kreftene ved negativ forskyvning

% Implementerer metoden for minste kvadraters polynom

%POSITIV FORSKYVNING
n = length(X1);
B = zeros(1:M+1);
F = zeros(n,M+1);

for m=1:M+1
    F(:,m)=X1'.^(m-1);
end

A = F'*F;
B = F'*Y1';
C1 = A\B;
C1 = flipud(C1);

%NEGATIV FORSKYVNING
X2 = -X1;
Y2 = -Y1;

n = length(X2);
B = zeros(1:M+1);
F = zeros(n,M+1);

for k=1:M+1
    F(:,k)=X2'.^(k-1);
end

A = F'*F;
B = F'*Y2';

```

C MATLAB-kode

---

```
C2 = A\B;  
C2 = flipud(C2);
```

## C.2 Egenverdiproblem

MATLAB-funksjonene `egenverdiloser` og `detlign` løser egenverdiproblemet gitt ved ligning (3.21) i delkapittel 3.2. Funksjonen `detlign` gir det karakteristiske polynomet som en funksjon av  $\alpha$ , og den innebygde MATLAB-rutinen `fzero` benyttes til å finne nullpunktene.

```
function [z1,z2,dynfrek,alpha] = egenverdiloser(EI,m_tot,S_m,n,L)

% INPUT
% EI -      Stigerørets bøyestivhet
% m_tot -   Total akselerert masse per lengdeenhet
% S_m -     Strekkraft i stigerøret pga egenvekt
% n -       Antall egenverdier som skal løses
% L -       Stigerørets lengde

% OUTPUT
% z1 -
% z2 -
% dynfrek - Vektor som inneholder egenfrekvensene knyttet til
%           hver egenverdi
% alpha -   Vektor som inneholder egenverdiene

% Henter karakteristisk ligning som funksjon av alpha.
% Nullpunktene gir egenverdiene
d = detlign(EI,S_m,L);

beta = sqrt(S_m/EI);

dynfrek = zeros(n,1);
z1 = zeros(n,1);
z2 = zeros(n,1);
alpha = zeros(n,1);

% Startverdi for MATLAB-rutinen fzero
alpha_0 = 0.005;
% Setter toleranseverdier for MATLAB-rutinen fzero
options = optimset('TolX',10^-30);
% Finner første egenverdi, og lagrer egenverdier, egenfrekvenser etc
.
% i sine respektive vektorer
alpha_n = fzero(d,alpha_0,options);
wn = alpha_n^2*sqrt(EI/m_tot);
dynfrek(1,1)=wn;
alpha(1,1) = alpha_n;
z1(1,1)=(beta^2 + sqrt(beta^4+4*alpha_n^4))/2;
z2(1,1)=(beta^2 - sqrt(beta^4+4*alpha_n^4))/2;

j = alpha_0 + 0.001;

% Løkke for å finne de n-1 neste egenverdiene
```

```
for i = 2:n

    for j=j:0.0005:10
        alpha_0=j;
        alpha_n = fzero(d,alpha_0,options);
        wn = alpha_n^2*sqrt(EI/m_tot);
        if wn>dynfrek(i-1,1) && wn/dynfrek(i-1,1)>1.01
            dynfrek(i,1)=wn;
            z1(i,1)=(beta^2 + sqrt(beta^4+4*alpha_n^4))/2;
            z2(i,1)=(beta^2 - sqrt(beta^4+4*alpha_n^4))/2;
            alpha(i,1) = alpha_n;
            break;
        else
            continue;
        end
    end
end
```

```
function [d] = detlign(EI,S_m,L)

% INPUT
% EI -      Stigerørets bøyestivhet
% S_m      Strekkraft pga egenvekt
% L -      Stigerørets lengde

% OUTPUT
% d -      Karakteristisk ligning som en anonym funksjon av alpha

beta = sqrt(S_m/EI);

d = @(alpha) sinh(sqrt((2 * beta ^ 2) + 0.2e1 * sqrt((beta ^ 4 + 4 *
    alpha ^ 4))) * L / 0.2e1) * sqrt(-(2 * beta ^ 2) + 0.2e1 * sqrt
    ((beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4))) * cos(sqrt(-(2 * beta ^ 2) + 0.2e1
    * sqrt((beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4))) * L / 0.2e1) * sqrt((beta ^ 4
    + 4 * alpha ^ 4)) / 0.2e1 - sqrt((2 * beta ^ 2) + 0.2e1 * sqrt((
    beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4))) * cosh(sqrt((2 * beta ^ 2) + 0.2e1 *
    sqrt((beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4))) * L / 0.2e1) * sin(sqrt(-(2 *
    beta ^ 2) + 0.2e1 * sqrt((beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4))) * L / 0.2e1
    ) * sqrt((beta ^ 4 + 4 * alpha ^ 4)) / 0.2e1;
```

### C.3 Bevegelse av stigerør

De følgende MATLAB-funksjonene bestemmer den dynamiske eksitasjonen til stigerøret, samt momenter og skjærkrefter, som et resultat av kontrollbøyens bevegelse. De modale koordinatene  $q_n(t)$  gitt ved ligning (3.33) bestemmes ved hjelp av den innebygde MATLAB-rutinen `ode45`.

```
function [u_ks,PHI,Q,dynfrek2,u,udyn] = rorforskyvning(z1,z2,aj,bj,L
    ,EI,S_m,m_tot,T0,ug,t,x,n,a_tt,b_tt,a0_tt)

% INPUT
% EI – Stigerørets bøyestivhet
% S_m – Strekkraft pga egenvekt
% m_tot – Total akselerert masse per lengdeenhet
% L – Stigerørets lengde
% z1 –
% z2 –
% aj,bj – Vektorer med koeffisientene i Fourierrekken som
% beskriver kontrollbøyens bevegelse
% a0_tt,a_tt,b_tt – Vektorer med koeffisientene i Fourierrekken som
% beskriver kontrollbøyens akselerasjon
% T0 – Perioden til kontrollbøyebevegelsen
% ub – Tidsserie som inneholder kontrollbøyens
% bevegelse
% t – Tidsvektor som inneholder tidsskrittene alt
% evalueres over
% x – Lengdevektor for stigerørets lengde
% n – Antall svingemoder som er med i beregningene

% OUTPUT
% PHI – Matrise som inneholder svingemodene kolonnevis
% Q – Matrise som inneholder de modale koordinatene
% kolonnevis
% dynfrek2 – Vektor med egenfrekvensene beregnet ved hjelp
% av generalisert masse og stivhet
% u – Total forskyvning av stigerøret
% udyn – Dynamisk respons av stigerøret
% M – Momentfordeling
% V – Skjærkraftfordeling

beta = sqrt(S_m/EI);

%Henter koeffisientene til svingemodene
Z = koeffisient(z1,z2,L,m_tot,n);

%SVINGEMODER

%BEREGNER PHI1
[phi,x] = phi1(Z,z1,z2,x,1);
```

```
PHI = zeros(length(phi),n);
PHI(1:length(phi),1) = phi;
%BEREGNER phi_n, n>1
for j=2:n
    phi_n = phi1(Z,z1,z2,x,j);
    PHI(1:length(phi),j) = phi_n;
end

%MODALE KOORDINATER

%Beregner q_1
tspan = t; %tidsrom for evaluering
u0 = [0;0]; % initialverdier
omega=2*pi/T0; % frekvens for kontrollbøyebevegelsen
% Henter modal koordinat og egenfrekvens for mode 1
[t_q,q,dynfrek2n] = ku1(tspan,u0,Z,1,L,m_tot,EI,S_m,z1,z2,aj,bj,
    omega,T0,a_tt,b_tt,a0_tt);
Q = zeros(length(q),n);
dynfrek2 = zeros(n,1);
dynfrek2(1) = dynfrek2n;
Q(1:length(q),1) = q(:,1);
%Beregner q_n, n>1
for j=2:n
    [t,q_n,dynfrek2n] = ku1(tspan,u0,Z,j,L,m_tot,EI,S_m,z1,z2,aj,bj,
    omega,T0,a_tt,b_tt,a0_tt);
    Q(1:length(q),j) = q_n(:,1);
    dynfrek2(j) = dynfrek2n;
end

%Finner total og dynamisk respons
u = zeros(length(Q),length(x));
udyn = zeros(length(Q),length(x));
u_ks = (sinh(beta.*x_ks) - x_ks.*beta*cosh(beta*L))/(sinh(beta*L)
    - L*beta*cosh(beta*L));

for i=1:length(q)
    ud = PHI(:,1)*Q(i,1);
    for r = 2:n
        ud_n = PHI(:,r)*Q(i,r);
        ud = ud+ud_n;
    end
    uks = u_ks*ug(i);
    ud2 = ud';
    u(i,:) = uks + ud2;
    udyn(i,:) = ud2;
end

%MOMENTFORDELING
```



```

M = zeros(length(Q),length(x));

uks_xx = (beta^2*sinh(beta.*x))/(sinh(beta*L) - L*beta*cosh(beta*L))
;

for i=1:length(Q)
    phi_nxx = E * cosh(sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 2 + F * sinh(
        sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 2 - G * cos(sqrt(-z2n) * x) *
        sqrt(-z2n) ^ 2 - H * sin(sqrt(-z2n) * x) * sqrt(-z2n) ^ 2;
    M_d = phi_nxx*Q(i,1);
    for j = 2:n
        phi_nxx = E * cosh(sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 2 + F * sinh(
            (sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 2 - G * cos(sqrt(-z2n) * x)
            * sqrt(-z2n) ^ 2 - H * sin(sqrt(-z2n) * x) * sqrt(-z2n)
            ^ 2;
        Mn_d = phi_nxx*Q(i,j);
        M_d = M_d + Mn_d;
    end
    M(i,:) = -EI*(M_d+ uks_xx*ug(i));
end

%SKJÆRKRAFTFORDELING
V = zeros(length(Q),length(x));
uks_xxx = (beta^3*cosh(beta.*x))/(sinh(beta*L) - L*beta*cosh(beta*L)
);

for i = 1:length(Q);
    phi_nxxx = E * sinh(sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 3 + F * cosh(
        sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 3 + G * sin(sqrt(-z2n) * x) *
        sqrt(-z2n) ^ 3 - H * cos(sqrt(-z2n) * x) * sqrt(-z2n) ^ 3;
    V_d = phi_nxxx.*Q(i,1);
    for j = 2:n
        phi_nxxx = E * sinh(sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 3 + F *
            cosh(sqrt(z1n) * x) * sqrt(z1n) ^ 3 + G * sin(sqrt(-z2n)
            * x) * sqrt(-z2n) ^ 3 - H * cos(sqrt(-z2n) * x) * sqrt(-
            z2n) ^ 3;
        Vn_d = phi_nxxx*Q(i,j);
        V_d = V_d + Vn_d;
    end
    V(i,:) = -EI*(V_d+uks_xxx*ug(i));
end

```

```

function Z = koeffisient(z1,z2,L,m_tot,n)

```

```

% INPUT
% z1 -
% z2 -
% L -      Stigerørets lengde
% m_tot -  Total akselerert masse
% n -      Antall moder

```

```
% OUTPUT
% Z –      Matrise som inneholder koeffisientene til svingemodene
%          kolonnevis

Z=zeros(4,n);
C_n=zeros(4,1);
for i=1:n

    z1n = z1(i,1);
    z2n= z2(i,1);

    A = [1 0 1 0;
         z1n 0 z2n 0;
         cosh(sqrt(z1n)*L) sinh(sqrt(z1n)*L) cos(sqrt(-z2n)*L) sin(
             sqrt(-z2n)*L);
         sqrt(z1n)*sinh(sqrt(z1n)*L) sqrt(z1n)*cosh(sqrt(z1n)*L) -
             sqrt(-z2n)*sin(sqrt(-z2n)*L) sqrt(-z2n)*cos(sqrt(-z2n)*
             L)];

    Z(1:4,i) = null(A);

end

%Normaliserer svingemodene slik at de blir masseortonormale
for i=1:n
    E = Z(1,i);
    F = Z(2,i);
    G = Z(3,i);
    H = Z(4,i);
    z1n = z1(i);
    z2n = z2(i);

    operasjon = 1;
    [K_n,K_Gn,M_n,P_n,c]= simplr1(E,F,G,H,z1n,z2n,S,EI,L,operasjon);
    C(i) = sqrt(1/(m*c));

    Z(1:4,i) = C(i)*Z(1:4,i);
end;
```

```
function [phi] = phi1(Z,z1,z2,x,n)

%INPUT
% Z –      Matrise som inneholder koeffisientene til hver
%          svingemode kolonnevis
% z1 –
% z2 –
% x –      Lengdevektor for stigerørets lengde
% n –      Modenummer
```

```
% OUTPUT
% phi -      Matrise som inneholder svingemode nummer n

z1n = z1(n,1);
z2n= z2(n,1);
E = Z(1,n);
F = Z(2,n);
G = Z(3,n);
H = Z(4,n);

phi = (E*cosh(sqrt(z1n).*x) + F*sinh(sqrt(z1n).*x) + G*cos(sqrt(-z2n)
).*x) + H*sin(sqrt(-z2n).*x));
```

```
function [q,dynfrek2] = ku1(t,u0,Z,n,L,m,EI,S,z1n,z2n,w,a_tt,b_tt,
    a0_tt)

% INPUT
% t -      Tidsrom de modale koeffisientene skal bestemmes over
% u0 -     Initialverdier
% Z -      Matrise som inneholder koeffisientene til
%          svingemodene kolonnevis
% n -      Modenummer
% L -      Stigerørets lengde
% m -      Total akselerert masse per lengdeenhet
% EI -     Stigerørets bøyestivhet
% S -      Strekkraft pga egenvekt
% z1n -
% z2n -
% w -      Bøyebevegelsens frekvens
% a0_tt,a_tt,b_tt - Koeffisientene til Fourier rekken som beskriver
%                  bøyens akselerasjon

% OUTPUT
% qn -     Modal koordinat for mode n
% dynfrek2 - Egenfrekvens for mode n

E = Z(1,n);
F = Z(2,n);
G = Z(3,n);
H = Z(4,n);

z1 = z1n(n);
z2= z2n(n);

% Den generaliserte massen, stivheten, geometriske stivheten
% og lasten gitt ved lign. (3.26) og (3.27) regnes ved hjelp av
% Simpsons regel implementert i simplr.m
operasjon = 2;
[K_n,K_Gn,M_n,P_n,C] = simplr(E,F,G,H,z1,z2,S,EI,L,operasjon);
```

```
K_n = EI*K_n;  
K_Gn = S*K_Gn;  
M_n = m*M_n;  
K = K_n-K_Gn;  
dynfrek2 = sqrt(K/M_n);  
  
% Finner de modale koordinatene ved hjelp av ode45 rutinen  
[t_q,q] = ode45(@ku_loser,t,u0,[],m,w,M_n,K_n,K_Gn,P_n,a_tt,b_tt,  
a0_tt);
```

```
function [kudot] = kuloser(t,y,m,w,M_n,K_n,K_Gn,P_n,a_tt,b_tt,a0_tt)  
  
% t - Tidsrom de modale koeffisientene skal  
% bestemmes over  
% y - Initialverdier  
% m - Total akselerert masse per lengdeenhet  
% w - Bøyebevegelsens frekvens  
% M_n - Generalisert masse  
% K_n - Generalisert stivhet  
% K_Gn - Generalisert geometrisk stivhet  
% P_n - Generalisert lastkoeffisient  
% a0_tt,a_tt,b_tt - Koeffisientene til Fourierrekken som beskriver  
% bøyens akselerasjon  
  
% OUTPUT  
% kudot - Matrise som inneholder den modale koordinaten  
% for mode n i første kolonne  
  
j = 1;  
aj_tt = a_tt(j);  
bj_tt = b_tt(j);  
ug_tt = a0_tt + aj_tt*cos(j*w*t) + bj_tt*sin(j*w*t);  
for j=2:length(a_tt)  
    aj_tt = a_tt(j);  
    bj_tt = b_tt(j);  
    ugj_tt = aj_tt*cos(j*w*t) + bj_tt*sin(j*w*t);  
    ug_tt = ug_tt + ugj_tt;  
  
end  
P_n = -m*ug_tt*P_n;  
  
kudot = [y(2); P_n/M_n - y(1)*(K_n-K_Gn)/M_n];
```

```
function [K_n,K_Gn,M_n,P_n,C] = simplr1(E,F,G,H,z1,z2,S,EI,L,  
operasjon)
```

```
% INPUT
```

---

```

% E –
% F –           Koeffisientene til
% G –           svingemode n
% H
% z1 –
% z2 –
% S –           Strekkraft pga egenvekt
% EI –          Stigerørets bøyestivhet
% L –           Stigerørets lengde
% operasjon –   Parameter som bestemmer hva som skal gjøres
%               (Normalisering av svingemode eller beregning av
%               generalisert masse, vtivhet og kraft)

% OUTPUT
% K_n –         Generalisert stivhet
% K_Gn –        Generalisert geometrisk stivhet
% M_n –         Generalisert masse
% P_n –         Generalisert last
% C –           Skaleringsfaktor

z1 = sqrt(z1);
z2 = sqrt(-z2);
beta = sqrt(S/EI);

a = 0;
b = 200;
M = 1000;
h = (b-a)/(2*M);

%Definerer funksjonene som skal integreres som anonyme funksjoner
integrand_Kn = @(x) (E*cosh(z1*x)+F*sinh(z1*x)+G*cos(z2*x)+H*sin(z2*
x))*(E*cosh(z1*x)*z1^4+F*sinh(z1*x)*z1^4+G*cos(z2*x)*z2^4+H*sin(
z2*x)*z2^4);
integrand_KGn = @(x) (E*cosh(z1*x)+F*sinh(z1*x)+G*cos(z2*x)+H*sin(z2
*x))*(E*cosh(z1*x)*z1^2+F*sinh(z1*x)*z1^2-G*cos(z2*x)*z2^2-H*sin(
z2*x)*z2^2);
integrand_Mn = @(x) (E*cosh(z1*x)+F*sinh(z1*x)+G*cos(z2*x)+H*sin(z2*
x))*(E*cosh(z1*x)+F*sinh(z1*x)+G*cos(z2*x)+H*sin(z2*x));
integrand_Pn = @(x) (E*cosh(z1*x)+F*sinh(z1*x)+G*cos(z2*x)+H*sin(z2*
x))*((sinh(beta*x) - x*beta*cosh(beta*L))/(sinh(beta*L) - L*beta*
cosh(beta*L)));

% Regner ut skaleringsfaktoeren gitt ved ligning 3.35
% for normalisering av svingemodene
if operasjon==1
    C1 = 0;
    C2 = 0;

```

---

```
    for k=1:M
        x = a+h*(2*k-1);
        C1 = C1 + feval(integrand_Mn,x);
    end

    for k=1:(M-1);
        x = a+h*2*k;
        C2 = C2 + feval(integrand_Mn,x);
    end
    C = h*(feval(integrand_Mn,a)+feval(integrand_Mn,b)+4*C1+2*C2)/3;
    K_n = 0;
    K_Gn = 0;
    M_n = 0;
    P_n = 0;
else
    %GENERALISERT STIVHET
    K_n1 = 0;
    K_n2 = 0;

    for k=1:M
        x = a+h*(2*k-1);
        K_n1 = K_n1 + feval(integrand_Kn,x);
    end

    for k=1:(M-1);
        x = a+h*2*k;
        K_n2 = K_n2 + feval(integrand_Kn,x);
    end

    K_n = h*(feval(integrand_Kn,a)+feval(integrand_Kn,b)+4*K_n1+2*
        K_n2)/3;

    %GENERALISERT GEOMETRISK STIVHET
    K_Gn1 = 0;
    K_Gn2 = 0;

    for k=1:M
        x = a+h*(2*k-1);
        K_Gn1 = K_Gn1 + feval(integrand_KGn,x);
    end

    for k=1:(M-1);
        x = a+h*2*k;
        K_Gn2 = K_Gn2 + feval(integrand_KGn,x);
    end

    K_Gn = h*(feval(integrand_KGn,a)+feval(integrand_KGn,b)+4*K_Gn1
        +2*K_Gn2)/3;
```

```
%GENERALISERT MASSE
M_n1 = 0;
M_n2 = 0;

for k=1:M
    x = a+h*(2*k-1);
    M_n1 = M_n1 + feval(integrand_Mn,x);
end

for k=1:(M-1);
    x = a+h*2*k;
    M_n2 = M_n2 + feval(integrand_Mn,x);
end

M_n = h*(feval(integrand_Mn,a)+feval(integrand_Mn,b)+4*M_n1+2*
    M_n2)/3;

%GENERALISERT LAST
P_n1 = 0;
P_n2 = 0;

for k=1:M
    x = a+h*(2*k-1);
    P_n1 = P_n1 + feval(integrand_Pn,x);
end

for k=1:(M-1);
    x = a+h*2*k;
    P_n2 = P_n2 + feval(integrand_Pn,x);
end

P_n = h*(feval(integrand_Pn,a)+feval(integrand_Pn,b)+4*P_n1+2*
    P_n2)/3;
C = 0;

end
```





# Bibliografi

- [1] Christine Adal. Resistance and strength of marine structures subjected to ice loads. Rapport, Norwegian University of Science and Technology, Department of Marine Technology, 2003.
- [2] Einar Bernt Glomnes. Conceptual design of conical buoy for arctic conditions. Rapport, Norwegian University of Science and Technology, Department of Marine Technology, 2006.
- [3] TJO Sanderson. *Ice Mechanics*. Graham & Trotman, 1988.
- [4] FORCE Technology Norway AS. *Design for Ice Actions*.
- [5] Einar Bernt Glomnes. Surface buoys and jack-ups for arctic conditions. Hovedfagsoppgave, Norwegian University of Science and Technology Department of Marine Technology, 2007.
- [6] Ivar Langen og Ragnar Sigbjörnsson. *Dynamisk analyse av konstruksjoner*. Tapir, 1979.
- [7] Anil K. Chopra. *Dynamics of Structures, Theory And Applications To Earthquake Engineering*. PEARSON, Prentice Hall, tredje utgave, 2007.
- [8] Forelesningsnotater. Mek4510 svingninger i konstruksjoner, 2007.
- [9] *RIFLEX Theory Manual*.
- [10] *RIFLEX User's Manual*.
- [11] Robert D. Cook. *Concepts And Applications Of Finite Element Analysis*. Wiley, fjerde utgave, 2002.
- [12] Jagmohan L. Humar. *Dynamics of Structures*,. A.A. Balkema Publishers/-Lisse/Abingdon/Exton (PA)/Tokyo, andre utgave, 2002.
- [13] Ray W. Clough og Joseph Penzien. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, Inc., andre utgave, 1993.

## BIBLIOGRAFI

---

- [14] PP Benham, RJ Crawford og CG Armstrong. *Mechanics of Engineering Materials*. PEARSON, Prentice Hall, andre utgave, 1996.
- [15] [http://en.wikipedia.org/wiki/drag\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/drag_coefficient).
- [16] John H. Mathews og Kurtis D. Fink. *Numerical Methods Using MATLAB*. PEARSON, Prentice Hall, fjerde utgave, 2004.

